MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Analyse de convergence d'une méthode faisceaux à métrique variable et de sa version diagonale pour résoudre un problème de programmation convexe non différentiable avec et sans contraintes

Lauwarys, Nathalie

Award date:
1994

Awarding institution:
Universite de Namur

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

ANALYSE DE CONVERGENCE D'UNE METHODE FAISCEAUX A METRIQUE VARIABLE ET DE SA VERSION DIAGONALE POUR RESOUDRE UN PROBLEME DE PROGRAMMATION CONVEXE NON DIFFERENTIABLE AVEC ET SANS CONTRAINTES.

Promoteur : J.-J. STRODIOT

Nathalie LAUWERYS

Année académique : 1993-1994

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTE DES SCIENCES

ANALYSE DE CONVERGENCE D'UNE METHODE FAISCEAUX A METRIQUE VARIABLE ET DE SA VERSION DIAGONALE POUR RESOUDRE UN PROBLEME DE PROGRAMMATION CONVEXE NON DIFFERENTIABLE AVEC ET SANS CONTRAINTES.

Promoteur : J.-J. STRODIOT

Nathalie LAUWERYS

Année académique : 1993-1994

J'exprime toute ma gratitude envers Monsieur Jean-Jacques STRODIOT pour son aide et sa guidance qui me furent d'un très grand apport lors de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens également à remercier ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de mes études.

Avant-propos

La motivation principale de ce mémoire est la résolution de problèmes d'optimisation où les fonctions à optimiser ne sont pas nécessairement différentiables.

Ce mémoire comprend deux parties :

- la première partie sera consacrée aux problèmes d'optimisation sans contrainte,
- la seconde partie aux problèmes d'optimisation avec contraintes.

TABLE DES MATIERES

1ère PARTIE : OPTIMISATION DE PROBLEMES SANS CONTRAINTE

CHAPITRE 4 : METHODE PROXIMALE A METRIQUE VARIABLE DE TYPE FAISCEAU

2ème PARTIE : OPTIMISATION DE PROBLEMES AVEC CONTRAINTES

CHAPITRE 5 : METHODES DE FAISCEAUX DIAGONALES EN OPTIMISATION CONVEXE

CHAPITRE 6 : APERCU DE DEUX ALGORITHMES PERMETTANT D'AUGMENTER LA VITESSE DE CONVERGENCE DES METHODES PRECEDENTES.

ANNEXES

1ère PARTIE : OPTIMISATION DE PROBLEMES SANS CONTRAINTE

L'algorithme proximal a été introduit par Rockafellar pour ***rechercher le minimum d'une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement sur l'espace euclidien R^n.***

L'algorithme associé à cette méthode génère une suite (x_k) telle que

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in R^n} \left\{ f(x) + \frac{1}{2t_k} \|x - x_k\|^2 \right\}$$

où (t_k) est une suite de scalaires strictement positifs.
Cet algorithme s'appelle l'algorithme de la méthode proximale.

Dans cette première partie du travail, nous étudierons d'abord la méthode proximale.
Ensuite, nous généraliserons cette méthode de diverses manières.

Le chapitre 1 traitera de l'algorithme du ε-sous-différentiel, plus général que celui du point proximal et qui nous permettra d'étudier la convergence de ce dernier.

Le chapitre 2 décrira de manière théorique l'algorithme du point proximal et en étudiera la convergence avant de passer à l'étude de la version implémentable de cet algorithme.

Le chapitre 3 généralisera l'algorithme proximal en remplaçant à chaque itération k la fonction f par une fonction φ_k.
En considérant toutes ces fonctions φ_k, on obtiendra ainsi un faisceau. C'est pourquoi le nouvel algorithme portera le nom d'algorithme ou méthode des faisceaux.

Finalement au chapitre 4, nous approfondirons la généralisation en remplaçant non seulement à chaque itération k la fonction f par une fonction φ_k mais en faisant également varier à chaque itération la métrique que l'on utilise.
Ainsi, le terme quadratique intervenant dans le calcul de x_{k+1} à savoir $\|x - x_k\|^2$ sera remplacé par $\|x - x_k\|_{M_k}^2 = < x - x_k, M_k(x - x_k) >$ où M_k est une matrice définie positive.
Cette variante de l'algorithme proximal sera appelée *méthode des faisceaux à métrique variable*.
Pour terminer ce chapitre, nous considérerons un choix particulier de faisceau, à savoir le faisceau des plans sécants ainsi que diverses manières de mettre à jour les matrices définissant la métrique.

CHAPITRE 1 : METHODE DU ε- SOUS-DIFFERENTIEL.

1.1 INTRODUCTION

La motivation principale de ce chapitre est l'étude du problème d'optimisation convexe sans contrainte suivant :

$$\min f(x)$$

où f est une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement et définie de R^n dans $R \cup \{+\infty\}$.

Pour le rappel des définitions concernant ce problème, on pourra se référer aux annexes I et II.

A cette fin, nous étudierons l'algorithme général du ε-sous-différentiel.
Les résultats de convergence que nous obtiendrons constitueront en fait des résultats de base qui nous seront très utiles lorsque l'on étudiera dans le chapitre 2 la convergence de l'algorithme proximal.

Rappelons-nous que dans le cas différentiable, la plupart des algorithmes utilisés pour résoudre les problèmes d'optimisation sans contrainte sont des algorithmes de descente basés sur le schéma suivant :

étant donné, un point x_k on calcule d_k une direction de descente de f en x_k et on effectue une recherche linéaire dans cette direction à partir du point x_k pour trouver l'itéré suivant.

Pour rappel, d_k est une direction de descente en x_k si lorsque l'on se déplace dans cette direction à partir du point x_k la valeur de la fonction objectif f diminue.

De plus, la direction de descente la plus connue lorsque le gradient de f en x_k est non nul est $d_k = -\nabla f(x_k)$.

En imitant le raisonnement précédent dans le cas non différentiable, la première idée est évidemment de prendre pour d_k l'opposé d'un sous-gradient de f en x_k ou plus généralement l'opposé d'un ε_k-sous-gradient.

Cette direction, contrairement au cas différentiable n'est pas toujours nécessairement une direction de descente. Cependant, moyennant des conditions sur la taille du pas de descente et sur ε, on peut montrer que cet algorithme converge.

Dans le paragraphe 1.2, cet algorithme sera décrit de manière plus précise.

Ensuite dans le paragraphe 1.3, nous donnerons les principaux résultats de convergence de ce nouvel algorithme.

1.2 DESCRIPTION DE L'ALGORITHME.

Exprimons de manière plus précise l'algorithme décrit à la section précédente.

Algorithme 1.1

PAS 1 (initialisation)

Choisir $x_1 \in R^n$.

PAS 2 (itérer)

Pour $n = 1,2,\ldots$

poser $x_{n+1} = x_n - t_n \gamma_n$

avec $t_n > 0$,

$\varepsilon_n \geq 0$,

$\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$.

Remarque :

L'algorithme ci-dessus est caractérisé par un triplet $\{t_n, \varepsilon_n, \gamma_n\}$ qui peut être donné à priori ou qui peut être construit par l'algorithme.

1.3 CONVERGENCE.

Avant d'établir la convergence de l'algorithme 1.1 nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1

Soit (x_n) une suite générée par l'algorithme 1.1.

$\forall y \in R^n, \quad \forall n$

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + t_n^2 \|\gamma_n\|^2 + 2t_n\big(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\big). \tag{1.1}$$

Preuve :

- Essayons d'abord de décomposer le membre de gauche de l'inégalité (1.1); on obtient :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - y\|^2 &= \|x_{n+1} - x_n + x_n - y\|^2 \\ &= \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \|x_n - y\|^2 + 2 < x_{n+1} - x_n, x_n - y >.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $x_{n+1} - x_n = -t_n \gamma_n$, il résulte que :

$$\|x_{n+1} - y\|^2 = t_n^2 \|\gamma_n\|^2 + \|x_n - y\|^2 + 2t_n < \gamma_n, y - x_n >. \tag{1.2}$$

- Essayons ensuite de déduire l'inégalité (1.1).

Par construction $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$. Dès lors en utilisant la définition du ε_n-sous-différentiel (voir définition IV.11 en annexe), on obtient

$$\forall y \in R^n : f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > -\varepsilon_n,$$

ou encore

$$\forall y \in R^n : < \gamma_n, y - x_n > \leq f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n.$$

Par conséquent il résulte de la relation (1.2) que

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq t_n^2 \|\gamma_n\|^2 + \|x_n - y\|^2 + 2t_n[f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n] \forall y \in R^n.$$

□

Le premier résultat de convergence est donné par la proposition suivante.

Proposition 1.1

Soit (x_n) une suite générée par l'algorithme 1.1.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$,

$\varepsilon_n \to 0$,

$t_n \|\gamma_n\|^2 \to 0$

alors $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{R^n} f(x)$.

Preuve :

Par définition de la borne inférieure d'une fonction $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \geq \inf_{R^n} f(x)$.

Supposons par l'absurde que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) > \inf_{R^n} f(x) \underset{noté}{=} \overline{f}$. (1.3)

- Montrons que dans ce cas

$$\exists \delta > 0 \quad \exists y \in R^n \quad \exists n_0 \; tq \; f(y) < f(x_n) - \delta \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.4}$$

Si ce n'était pas le cas on aurait $\forall \delta > 0 \quad \forall y \in R^n \quad \forall n \quad f(y) \geq f(x_n) - \delta$

et en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ il résulterait que $\forall y \in R^n \quad \forall n \; : \; f(y) \geq f(x_n) - \frac{1}{n}$

ce qui donnerait en passant à la limite inférieure $f(y) \geq \lim_{n \to \infty} f(x_n)$.

On aurait dès lors par définition de la borne inférieure $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq \overline{f}$, ce qui est contraire à l' hypothèse (1.3).

- Montrons ensuite que (1.3) contredit l'hypothèse $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$.

- Par hypothèse $t_n \|\gamma_n\|^2 \to 0$ *et* $\varepsilon_n \to 0$. D'où

$$t_n \|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n \to 0.$$

En utilisant la définition de la limite il résulte que pour n assez grand

$$t_n\|\gamma_n\|^2+\varepsilon_n<\frac{\delta}{2}.$$

En supposant sans perdre de généralité que n_0 est assez grand, on obtient

$$t_n\|\gamma_n\|^2+\varepsilon_n<\frac{\delta}{2}\quad \forall n\geq n_0. \tag{1.5}$$

- Appliquons ensuite le lemme 1.1. On obtient :

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y\|^2 &\leq \|x_n-y\|^2+t_n^2\|\gamma_n\|^2+2t_n\left[f(y)-f(x_n)+\varepsilon_n\right]\\ &\leq \|x_n-y\|^2+2t_n^2\|\gamma_n\|^2+2t_n\left[f(y)-f(x_n)+\varepsilon_n\right]\\ &=\|x_n-y\|^2+2t_n\left[t_n\|\gamma_n\|^2+f(y)-f(x_n)+\varepsilon_n\right].\end{aligned}$$

- On a donc $\forall n\geq n_0$ en utilisant les relations (1.4) et (1.5):

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y\|^2 &\leq \|x_n-y\|^2+2t_n\left[\frac{\delta}{2}-\delta\right]\\ &=\|x_n-y\|^2-\delta\, t_n.\end{aligned}$$

On obtient ainsi par récurrence $\forall n\geq n_0$:

$$\begin{aligned}\|x_n-y\|^2 &\leq \|x_{n-1}-y\|^2-\delta t_{n-1}\\ &\leq \|x_{n-2}-y\|^2-\delta t_{n-2}-\delta t_{n-1}\\ &\ \ \vdots\\ &\leq \|x_{n_0}-y\|^2-\delta\sum_{i=n_0}^{n-1}t_i\,.\end{aligned}$$

Dès lors

$$0\leq\delta\sum_{i=n_0}^{n-1}t_i+\|x_n-y\|^2\leq\|x_{n_0}-y\|^2.$$

Par conséquent $\sum_{i=n_0}^{\infty}t_i$ est convergente, ce qui contredit une de nos hypothèses.

□

La proposition suivante nous précise le lien qui existe entre une valeur d'adhérence de la suite (x_n) engendrée par l'algorithme 1.1 et sa limite.

Proposition 1.2

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de (x_n) vérifiant

$$\|x_{n+1}-\bar{x}\|^2\leq\|x_n-\bar{x}\|^2+\delta_n \tag{1.6}$$

où (δ_n) est une suite positive telle que $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$.

Alors toute la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$.

Preuve

Afin de prouver la thèse montrons que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_1 \; tq \; \forall n_2 \geq n_1 \quad \left\| x_{n_2+1} - \bar{x} \right\|^2 \leq \delta .$$

Par hypothèse $\bar{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_n) et $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$. On obtient ainsi par définition de la limite

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_1 \quad : \quad \left\| x_{n_1} - \bar{x} \right\| \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=n_1}^{\infty} \delta_n \leq \frac{\delta}{2}.$$

D'autre part $\forall n_2 \geq n_1$ on a par hypothèse

$$\begin{aligned}
\left\| x_{n_2+1} - \bar{x} \right\|^2 &\leq \left\| x_{n_2} - \bar{x} \right\|^2 + \delta_{n_2} \\
&\leq \left\| x_{n_2-1} - \bar{x} \right\|^2 + \delta_{n_2-1} + \delta_{n_2} \\
&\;\;\vdots \\
&\leq \left\| x_{n_1} - \bar{x} \right\|^2 + \sum_{n=n_1}^{n_2} \delta_n \leq \delta .
\end{aligned}$$

□

La proposition suivante assure la convergence de la suite (x_n) vers un minimum de f et cela sous des hypothèses assez générales.

Proposition 1.3

Soit (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - t_n \gamma_n \\ avec \quad t_n > 0, \quad \gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n), \quad \varepsilon_n \geq 0. \end{cases}$$

Soit m>0.

Dès lors:

(i) si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$

$\varepsilon_n \to 0$

$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - m t_n \left\| \gamma_n \right\|^2$

alors $f(x_n) \to \inf_{R^n} f$.

(ii) Si en plus (t_n) est bornée,

$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$

alors (s'il existe un minimum) $x_n \to \bar{x}$ minimum de f.

Preuve

(i) - Montrons d'abord que $(f(x_n))$ est une suite décroissante.

Par hypothèse $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - m\, t_n \|\gamma_n\|^2$.

Comme de plus m est strictement positif, on en déduit que $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$.

$(f(x_n))$ est donc une suite décroissante et tend soit vers $-\infty$, soit vers sa borne inférieure.

- Montrons ensuite que $f(x_n) \to \inf f$.

Nous savons que $f(x_n) \to -\infty$ ou $f(x_n) \to \inf\limits_n f(x_n)$.

a) supposons que $f(x_n) \to -\infty$.

Dans ce cas il est évident que $f(x_n) \to \inf\limits_{R^n} f$.

b) Supposons à présent que $f(x_n) \to f^*$ où f^* est la borne inférieure de la suite $(f(x_n))$.

Dans ce cas, essayons de vérifier que toutes les hypothèses de la proposition 1.1 sont vérifiées. Nous pourrions alors en déduire puisque $f(x_n)$ converge que $f(x_n) \to \inf\limits_{R^n} f$.

Or comme par hypothèse $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$ et $\varepsilon_n \to 0$ il nous suffit pour avoir toutes les hypothèses de la proposition 1.1 d'établir que $t_n \|\gamma_n\|^2 \to 0$.

En effet par hypothèse $f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m\, t_n \|\gamma_n\|^2 \geq 0$. D'où en passant à la limite, on obtient $0 = f^* - f^* \geq m \lim\limits_{n\to\infty} t_n \|\gamma_n\|^2 \geq 0$.

Par conséquent ,$t_n \|\gamma_n\|^2 \to 0$.

(ii) - Afin de montrer la seconde assertion de la proposition montrons dans un premier temps que la suite (x_n) est bornée et admet donc ainsi une valeur d'adhérence.

En effet, supposons qu'il existe un minimum x^*. En appliquant le lemme 1.1 avec $y = x^*$ et en tenant compte du fait que x^* est un minimum de f ,on obtient

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 + t_n^2\|\gamma_n\|^2 + 2t_n\left[f(x^*) - f(x_n) + \varepsilon_n\right]\\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 + t_n^2\|\gamma_n\|^2 + 2t_n\left[f(x_{n+1}) - f(x_n) + \varepsilon_n\right].\end{aligned}$$

Dès lors puisque par hypothèse, $f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq -mt_n \|\gamma_n\|^2 \leq m t_n \|\gamma_n\|^2$ on en déduit

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 + t_n^2\|\gamma_n\|^2 + 2t_n\left(mt_n\|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n\right)\\ &= \|x_n - x^*\|^2 + (1+2m)t_n^2\|\gamma_n\|^2 + 2t_n\varepsilon_n\end{aligned} \qquad (1.7)$$

et donc par récurrence, on obtient

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x^*\|^2 &\le \|x_{n-1} - x^*\|^2 + (1+2m)t_{n-1}^2\|\gamma_{n-1}\|^2 + 2t_{n-1}\varepsilon_{n-1} \\
&\le \|x_{n-2} - x^*\|^2 + (1+2m)\left[t_{n-1}^2\|\gamma_{n-1}\|^2 + t_{n-2}^2\|\gamma_{n-2}\|^2\right] + 2t_{n-1}\varepsilon_{n-1} + 2t_{n-2}\varepsilon_{n-2} \\
&\vdots \\
&\le \|x_1 - x^*\| + (1+2m) \sum_{i=1}^{\infty} t_i^2\|\gamma_i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} t_i\varepsilon_i .
\end{aligned}
$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2 \|\gamma_i\|^2$ et $\sum_{i=1}^{\infty} t_i\varepsilon_i$ sont deux séries convergentes.

En effet,

1) Montrons d'abord que la série $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2 \|\gamma_i\|^2$ est convergente.

   Pour cela il suffit de remarquer que par hypothèse $f(x_{i+1}) \le f(x_i) - mt_i\|\gamma_i\|^2$. Dès lors

$$t_i\|\gamma_i\|^2 \le \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{m}.$$

   En effectuant la somme pour i allant de 1 à l'infini, on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} t_i\|\gamma_i\|^2 &\le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) - f(x_{i+1}) \\
&= \frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1) - f(x_2) + f(x_2) - \cdots + f(x_n) - f(x_{n+1})\right] \\
&= \frac{1}{m}\left(f(x_1) - \inf f\right) < \infty.
\end{aligned}
$$

   Par conséquent la série $\sum_{i=1}^{\infty} t_i \|\gamma_i\|^2$ est convergente et comme par ailleurs la suite (t_i) est une suite bornée, on en déduit que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2 \|\gamma_i\|^2 < \infty$.

2) Montrons ensuite que la série $\sum_{i=1}^{\infty} t_i\varepsilon_i$ est convergente.

   Cela provient du fait que la suite (t_i) est bornée et que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ est convergente.

- Dans un second temps vérifions que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de f.

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n), $\bar{x}$ est la limite d'une sous-suite $\left(x_{n_k}\right)$.

Montrons que $\bar{x}$ est un minimum de f.

Par la semi-continuité inférieure de f on a $f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)$. (voir annexe II).

Par conséquent puisque par le point (i) de la démonstration on a $\underline{\lim}_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \inf_{R^n} f(x)$.

On en déduit que $f(\bar{x}) \leq \inf_{R^n} f(x)$ et donc que $\bar{x}$ est un minimum.

- Prouvons finalement que toute la suite (x_n) converge vers un minimum de f.

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite(x_n). Pae le point précédent $\bar{x}$ est un minimum de f et donc par l'inégalité (1.7) on obtient :

$$\left\|x_{n+1} - \bar{x}\right\|^2 \leq \left\|x_n - \bar{x}\right\|^2 + (1+2m)t_n^2\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2t_n\varepsilon_n.$$

Posons alors $\delta_n = (1+2m)t_n^2\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2t_n\varepsilon_n$.

(δ_n) est une suite positive qui vérifie $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$. En effet,on a montré précédemment que $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^2\left\|\gamma_i\right\|^2$ et $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i$ convergent. Par conséquent, il suffit d'appliquer la proposition 1.2 pour avoir la thèse.

□

CHAPITRE 2 : METHODE PROXIMALE

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudierons l'algorithme proximal qui a été introduit par Rockafellar pour rechercher le minimum d'une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement sur R^n.

L'objectif poursuivi par Rockafellar lors de l'élaboration de cet algorithme était de construire une suite (x_n) qui minimise la fonction objectif f tout en essayant si possible de choisir les itérés de cette suite de manière à ce qu'ils ne soient pas trop éloignés les uns des autres. C'est d'ailleurs pour cette dernière raison que cette méthode porte le nom de méthode proximale.

L'idée est de minimiser une perturbation de la fonction f en tenant compte du degré d'éloignement entre deux itérés successifs x_{n+1} et x_n.
De manière plus précise, étant donné x_n on va choisir l'itéré suivant x_{n+1} tel que
$x_{n+1} = \arg\min_{R^n} \tilde{f}(y)$ où $\tilde{f}(y) = f(y) + \frac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2$.
En procédant de cette façon, on peut en effet ainsi espérer que la suite obtenue soit une suite minimisante de f dont les itérés ne sont pas trop éloignés les uns des autres.
Notons que la formule précédente se note parfois aussi $x_{n+1} = p_f(x_n)$ car cette dernière expression met bien en évidence le fait que x_{n+1} est un point proximal.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'étude de cet algorithme.
Pour ce, nous montrerons d'abord que l'algorithme décrit ci-dessus est bien défini (voir § 2.2.1).
Ensuite nous essayerons d'exprimer l'itération proximale en fonction du sous-différentiel de f (voir § 2.2.2).
Cela nous permettra ainsi dans le § 2.2.3 de nous replacer dans le cadre de la méthode du ε-sous-différentiel et ainsi d'étudier la convergence de l'algorithme proximal en réutilisant les résultats obtenus au chapitre précédent.

Dans un second temps, nous nous intéresserons finalement à l'implémentation de l'algorithme proximal.

2.2 ALGORITHME PROXIMAL

2.2.1 Bien fondé de l'algorithme proximal

Dans l'algorithme proximal, comme on l'a vu au paragraphe précédent, on génère une suite (x_n) telle que

$$x_{n+1} = \arg\min_{R^n} \tilde{f}(y)$$

où $\tilde{f}(y) = f(y) + \frac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2$ et (t_n) est une suite de nombres réels strictement positifs.

Pour que cet algorithme ait un sens, il faut évidemment que $\tilde{f}$ possède un minimum et que celui-ci soit unique.

Comme $\tilde{f}$ est une fonction semi-continue inférieurement, elle atteint sa borne inférieure sur tout compact (voir proposition II.5 dans les annexes).
Par conséquent, si on arrivait à montrer que les ensembles niveaux

$\left\{ y \quad tq \quad f(y) + \frac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2 \leq \alpha \right\}$ de $\tilde{f}$ sont des ensembles fermés bornés pour tout α,

on serait assuré de l'existence d'un minimum de $\tilde{f}$.

Cette propriété des ensembles niveaux de $\tilde{f}$ découle de la proposition suivante.

Proposition 2.1

$\tilde{f}$ est inf - compacte c'est-à-dire pour tout α les ensembles niveaux $\left\{ y \quad tq \quad f(y) + \frac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2 \leq \alpha \right\}$ sont des fermés bornés.

Preuve :

- Montrons d'abord que les ensembles niveaux $\left\{ y \quad tq \quad f(y) + \frac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2 \leq \alpha \right\}$ sont fermés pour tout α.

  En effet, vu que f est s.c.i. et que $\| \quad \|^2$ est continue, la fonction $f + \frac{1}{2t_n}\| \,.- x_n\|^2$ est une fonction s.c.i. Par conséquent, ses ensembles niveaux sont fermés pour tout α (voir proposition II.4 en annexe).

- Montrons ensuite que les ensembles niveaux sont bornés.
  Supposons par l'absurde, qu'il existe un ensemble niveau non borné.
  Dans ce cas

$$\exists (y_k) \; tq \; \|y_k - x_n\| \to +\infty \quad et \qquad\qquad (2.1)$$
$$\tilde{f}(y_k) = f(y_k) + \frac{1}{2t_n}\|y_k - x_n\|^2 \leq \alpha \quad \forall k$$

Notons $\beta_k = \|y_k - x_n\|$. Comme β_k tend vers l'infini on peut supposer $\beta_k \geq 1$.

Définissons $z_k = \dfrac{y_k - x_n}{\beta_k}$ et considérons la fonction $\hat{f}(y) = f(y + x_n)$.

C'est une fonction convexe.

En effet, comme $x_n = \lambda x_n + (1-\lambda)x_n$ on a par définition de $\hat{f}$

$$\hat{f}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = f(\lambda(y_1 + x_n) + (1-\lambda)(y_2 + x_n)).$$

Par ailleurs, f étant convexe

$$\hat{f}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1 + x_n) + (1-\lambda)f(y_2 + x_n).$$

D'où par définition de $\hat{f}$

$$\hat{f}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda \hat{f}(y_1) + (1-\lambda)\hat{f}(y_2).$$

De plus pour tout k, on a par définition de z_k

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2t_n}=\hat{f}(y_k-x_n)+\frac{\|y_k-x_n\|^2}{2t_n}.$$

Dès lors par définition de $\hat{f}$, on a

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2t_n}=f(y_k)+\frac{\|y_k-x_n\|^2}{2t_n}.$$

On en déduit donc en utilisant l'inégalité (2.1) que

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2t_n}\leq\alpha .$$

D'autre part, comme par définition de z_k , $\|z_k\|=1$

$$\begin{aligned}\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)&\leq\hat{f}(z_k)\\&=\hat{f}\left(\frac{1}{\beta_k}(\beta_k z_k)+\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)0\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de convexité de $\hat{f}$ on en déduit

$$\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)\leq\frac{1}{\beta_k}\hat{f}(\beta_k z_k)+\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\hat{f}(0)$$

c'est à dire puisque $\beta_k>0$

$$\beta_k\quad\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)\leq\hat{f}(\beta_k z_k)+(\beta_k-1)\hat{f}(0)$$

ou encore

$$(1-\beta_k)\hat{f}(0)+\beta_k\quad\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)\leq\hat{f}(\beta_k z_k)$$

et donc

$$\hat{f}(0)+\beta_k\left[\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)-\hat{f}(0)\right]\leq\hat{f}(\beta_k z_k).$$

De plus, on a vu que $\hat{f}(\beta_k z_k)\leq\alpha-\dfrac{\beta_k^2}{2t_n}$, on peut dès lors en déduire que

$$\hat{f}(0)+\beta_k\left[\min_{\|z\|=1}\hat{f}(z)-\hat{f}(0)\right]+\frac{\beta_k^2}{2t_n}\leq\alpha\quad\forall k.$$

Or ceci est impossible.

En effet, le premier membre de l'inégalité est un polynôme de second degré en β_k. Par conséquent, à partir d'un certain k il va dépasser α.

□

Par la proposition précédente, on a prouvé l'existence d'un minimum de $\tilde{f}$.
L'unicité de celui-ci va résulter de la forte convexité de $\tilde{f}$ (et donc stricte convexité).
(voir proposition V.2 en annexe). Cette forte convexité est assurée par la proposition suivante.

Proposition 2.2

$\tilde{f}$ est fortement convexe, c'est-à-dire :
$\exists \alpha > 0 \quad tq \quad \forall x, \forall y, \forall \lambda \in [0,1]$
$$\tilde{f}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \tilde{f}(x) + (1-\lambda)\tilde{f}(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Preuve :

- Montrons d'abord que $g(x) = \frac{1}{2t_n}\|x - x_n\|^2$ est fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$.

  Comme $\nabla g(x) = \frac{1}{t_n}(x - x_n)$ et $\nabla g(y) = \frac{1}{t_n}(y - x_n)$, on a
$$\begin{aligned} < \nabla g(y) - \nabla g(x), y - x > &= \frac{1}{t_n} < y - x, y - x > \\ &= \frac{1}{t_n}\|y - x\|^2. \end{aligned}$$
  Par conséquent $< \nabla g(y) - \nabla g(x), y - x > \geq \frac{1}{t_n}\|y - x\|^2$.

  On en déduit donc que g est fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$ (voir proposition I.10 en annexe).

- Montrons ensuite que $\tilde{f}$ est fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$.

  Comme f est convexe et g est fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$, la somme de ces deux fonctions $\tilde{f}$ est une fonction fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$ (voir proposition I.10 en annexe).

  On a donc la thèse en prenant $\alpha = \frac{1}{t_n}$.

□

2.2.2 Lien entre algorithme proximal et sous-différentiel

Dans ce paragraphe on réexprimera l'itération proximale

$$\begin{cases} x_{n+1} = p_f(x_n) \\ \quad = \operatorname{argmin}\left\{ f(y) + \dfrac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2 \right\} \\ \quad = \operatorname{argmin} \tilde{f}(y). \end{cases}$$

en fonction du sous-différentiel de f.

Cela nous permettra dans le paragraphe suivant de pouvoir resituer l'itération proximale dans le contexte de la méthode du ε-sous-différentiel.
Nous pourrons ainsi nous reservir des résultats obtenus au chapitre précédent pour étudier la convergence de l'algorithme proximal.

Or par les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'une fonction convexe (voir proposition V.1 en annexe) on peut réexprimer l'itération proximale $x_{n+1} = p_f(x_n)$ sous la forme $0 \in \partial\tilde{f}(x_{n+1})$. (2.2)

Par ailleurs, on a $\tilde{f}(y) = f(y) + \dfrac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2$, par conséquent comme $\dfrac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2$ est continue sur $dom\, f \cap dom\, \dfrac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2$ on obtient par les règles d'addition de 2 sous-différentiels (voir proposition IV.9 en annexe) :

$$\partial\tilde{f}(y) = \partial f(y) + \partial\left(\frac{1}{2t_n}\left(\|y - x_n\|\right)^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\partial\tilde{f}(y) = \partial f(y) + \frac{1}{t_n}(y - x_n).$$

On peut dès lors écrire (2.2) de la manière suivante

$$0 \in \partial f(x_{n+1}) + \frac{1}{t_n}(x_{n+1} - x_n),$$

ou encore

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{t_n} \in \partial f(x_{n+1}).$$

On en déduit donc en posant $\gamma_n = \dfrac{x_n - x_{n+1}}{t_n}$ que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$. Par conséquent, l'itération proximale peut se mettre sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - t_n\gamma_n \quad \textit{où} \quad \gamma_n \in \partial f(x_{n+1}).$$

2.2.3 Convergence

Avant d'étudier la convergence de l'algorithme proximal, on va d'abord montrer qu'il rentre dans le schéma général de l'algorithme du ε - sous-différentiel.
Cela nous facilitera l'étude de la convergence de l'algorithme proximal car on pourra utiliser les résultats de convergence de l'algorithme de la méthode du ε - sous-différentiel.

2.2.3.1 Lien entre l'algorithme proximal et la méthode du ε - sous-différentiel

La proposition suivante nous montre que l'algorithme proximal est en fait un cas particulier de la méthode du ε-sous-différentiel.

Proposition 2.3

$$x_{n+1} = p_f(x_n) \tag{2.3}$$

si et seulement si $x_{n+1} = x_n - t_n \gamma_n$

avec $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$, (2.4)

$$\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - t_n \|\gamma_n\|^2 \geq 0.$$

Preuve :

- Supposons par hypothèse que $x_{n+1} = p_f(x_n)$ et montrons que la relation (2.4) est vérifiée.

Par le paragraphe précédent (2.2.2) on sait que $x_{n+1} = p_f(x_n)$ si et seulement si $x_{n+1} = x_n - t_n \gamma_n$ avec $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$. Dès lors, en utilisant la définition du sous-différentiel de *f* en x_{n+1} (voir définition IV.1 en annexe) il résulte que

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + \langle \gamma_n, y - x_{n+1} \rangle.$$

On a donc en particulier

$$f(x_n) \geq f(x_{n+1}) + \langle \gamma_n, x_n - x_{n+1} \rangle$$

et donc comme $x_n - x_{n+1} = t_n \gamma_n$, on obtient

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) - t_n \|\gamma_n\|^2 = \varepsilon_n \geq 0.$$

Pour que la relation (2.4) soit satisfaite, il reste à voir que $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$.

Or on sait que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$. Par conséquent, par définition du sous-différentiel de *f* en x_{n+1}, on a

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + \langle \gamma_n, y - x_{n+1} \rangle$$

et donc comme ajouter le terme $f(x_n) - f(x_n)$ au membre de droite de l'inégalité revient à ajouter un terme nul , on a

$$\forall y \quad f(y) \geq \underline{f(x_{n+1})} + f(x_n) \underline{- f(x_n)} + \langle \gamma_n, y - x_n \rangle + \underline{\langle \gamma_n, x_n - x_{n+1} \rangle}$$

c'est-à-dire par définition de ε_n

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > -\varepsilon_n,$$

ou encore

$$\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n).$$

- Inversement, supposons par hypothèse que la relation (2.4) est vérifiée et montrons que $x_{n+1} = p_f(x_n)$.

Pour cela il suffit de prouver que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$, or par hypothèse $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ et $\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - t_n \|\gamma_n\|^2$. On a donc par définition du ε_n-sous-différentiel (voir définition IV.11 en annexe) et par définition de ε_n

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > -\left[f(x_n) - f(x_{n+1}) - t_n \|\gamma_n\|^2 \right],$$

c'est-à-dire

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + t_n \|\gamma_n\|^2 + < \gamma_n, y - x_n >$$

ou encore puisque $x_{n+1} = x_n - t_n \gamma_n$

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + < \gamma_n, x_n - x_{n+1} > + < \gamma_n, y - x_n >$$

et donc

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_{n+1} >.$$

On en déduit donc que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$ (voir définition IV.1 en annexe).

□

2.2.3.2 Convergence de l'algorithme proximal

Le principal résultat de convergence de l'algorithme proximal est le suivant :

Proposition 2.4

Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$, alors $(f(x_n))$ est décroissante,

$f(x_n) \to \inf_{R^n} f$

et $x_n \to x^*$ minimum de f s'il existe un minimum.

<u>Preuve</u> :

- Montrons d'abord que $(f(x_n))$ est décroissante et que $f(x_n) \to \inf f(x)$.

  Par la proposition précédente ε_n est positif, on en déduit donc en utilisant la définition de ε_n que $f(x_n) - f(x_{n+1}) = \varepsilon_n + t_n\|\gamma_n\|^2 \geq 0$. Dès lors $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$.
  Par conséquent la suite $(f(x_n))$ est décroissante et tend donc soit vers $-\infty$, soit vers sa borne inférieure.

  - Supposons en premier lieu que $f(x_n) \to -\infty$. Dans ce cas $f(x_n) \to \inf f(x)$.
  - Supposons ensuite que $f(x_n) \to f^* \in R$ où f^* est la borne inférieure de $(f(x_n))$, alors en passant à la limite dans l'inégalité $0 \leq \varepsilon_n + t_n\|\gamma_n\|^2 = f(x_n) - f(x_{n+1})$ on obtient

  $$0 \leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n + t_n\|\gamma_n\|^2 = f^* - f^* = 0.$$

  Par conséquent, on en déduit que $\varepsilon_n \to 0$ *et* $t_n\|\gamma_n\|^2 \to 0$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.1 pour en déduire que

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f^* = \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) = \inf f.$$

- Montrons ensuite que (x_n) converge vers un minimum de f s'il existe un minimum.

  - Dans un premier temps, vérifions que la suite (x_n) est bornée.
    Soit x^* un minimum quelconque de f. En décomposant $x_n - x^*$ de manière à faire intervenir le terme $x_n - x_{n+1}$ on obtient

  $$\|x_n - x^*\|^2 = \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_{n+1} - x^*\|^2 + 2 < x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - x^* >.$$

  De plus comme $x_n - x_{n+1} = t_n\gamma_n$ on a

  $$\|x_n - x^*\|^2 = \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_{n+1} - x^*\|^2 + 2t_n < \gamma_n, x_{n+1} - x^* >. \qquad (2.5)$$

Or par ailleurs $\|x_n - x_{n+1}\|^2 \geq 0$, par conséquent

$$\|x_n - x^*\|^2 \geq \|x_{n+1} - x^*\|^2 + 2t_n < \gamma_n, x_{n+1} - x^* >. \tag{2.6}$$

De plus, $2t_n < \gamma_n, x_{n+1} - x^* > \geq 0$. (2.7)

En effet comme $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$, par définition du sous-différentiel de f en x_{n+1} on a

$$f(x^*) \geq f(x_{n+1}) + < \gamma_n, x^* - x_{n+1} >.$$

Donc puisque x^* est un minimum de f

$$0 \leq f(x_{n+1}) - f(x^*) \leq - < \gamma_n, x^* - x_{n+1} >.$$

Dès lors

$$< \gamma_n, x_{n+1} - x^* > \geq 0.$$

Par conséquent puisque (t_n) est une suite de réels strictement positifs on a

$$2t_n < \gamma_n, x_{n+1} - x^* > \geq 0.$$

Donc (2.6) et (2.7) se réduisent finalement à $\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2$ (2.8).

Cela entraîne que la suite (x_n) est bornée et admet une valeur d'adhérence.

- Dans un second temps, remarquons que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de f.

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n), $\bar{x}$ est la limite d'une sous-suite (x_{n_k}).

Montrons que $\bar{x}$ est un minimum de f.

Par la semi-continuité inférieure de f on a $f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ (voir annexe II).

Par conséquent puisque l'on a déjà montré que $\underline{\lim}_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{R^n} f(x)$,

on en déduit que $f(\bar{x}) \leq \inf_{R^n} f(x)$ et donc $\bar{x}$ est un minimum.

- Montrons finalement que toute la suite (x_n) converge vers un minimum de f.

Soit x^* une valeur d'adhérence de (x_n). Par le point précédent x^* est un minimum de f et donc par l'inégalité (2.8) on sait que $\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2$.

Il suffit dès lors d'appliquer la proposition 1.2 avec $\delta_n = 0$ pour obtenir la thèse

□

Après avoir étudié de manière théorique l'algorithme proximal, passons maintenant à l'étude de la version implémentable de cet algorithme.

2.3 ALGORITHME IMPLEMENTABLE

2.3.1 Motivation

Rappelons d'abord en quoi consiste une itération de l'algorithme proximal théorique. On génère une suite (x_n) définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p_f(x_n) \\ \quad\quad = \arg\min f(y) + \dfrac{1}{2t_n}\|y - x_n\|^2 . \end{cases}$$

Dans une version implémentable, on ne calculera pas $p_f(x_n)$ exactement. On doit préciser un test d'arrêt sur la minimisation de la fonction $f + \dfrac{1}{2t_n}\|\cdot - x_n\|^2$.

Or par la proposition 2.3 on sait que $x_{n+1} = p_f(x_n)$ si et seulement si $x_{n+1} = x_n - t_n\gamma_n$ où $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ et $\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - t_n\|\gamma_n\|^2 \geq 0$.
Par conséquent,

$$f(p_f(x_n)) \leq f(x_n) - t_n\|\gamma_n\|^2 .$$

Donc, puisque $\gamma_n = \dfrac{x_n - p_f(x_n)}{t_n}$, il en résulte que

$$f(p_f(x_n)) \leq f(x_n) - t_n\left\|\frac{x_n - p_f(x_n)}{t_n}\right\|^2 ,$$

ou encore

$$f(p_f(x_n)) \leq f(x_n) - \frac{1}{t_n}\|p_f(x_n) - x_n\|^2 .$$

Dès lors, on imposera comme test d'arrêt

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{m}{t_n}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \quad \text{où} \quad 0 < m \leq 1 .$$

Notons que $p_f(x_n)$ vérifie bien ce test d'arrêt.

Cependant ce test n'est pas suffisant (voir proposition 1.3), on doit aussi avoir ?

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n) \text{ pour } \varepsilon_n \to 0 .$$

L'idée est donc de prendre

$$\varepsilon_n = K\left[f(x_n) - f(x_{n+1}) - \frac{m}{t_n}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \right] \quad \text{où} \quad K > 0 \qquad (*)$$

et de vérifier si

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n). \qquad (**)$$

Remarquons que pour vérifier (**) il faut d'abord vérifier que $\varepsilon_n \geq 0$.

Le théorème suivant montre qu'un x_{n+1} vérifiant (*) et (**) existe toujours.

Proposition 2.5

Supposons que f soit coercive, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$
et que $m \leq 1$ et $K \geq 1$ avec une inégalité stricte.
Si x_n n'est pas un minimum de *f*, alors il existe un $\delta > 0$ tel que
$\forall y \; tq \; \tilde{f}(y) \leq \tilde{f}(p_f(x_n)) + \delta$ on a
$\frac{x_n - y}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ et $\varepsilon_n = K\left[f(x_n) - f(y) - \frac{m}{t_n}\|y - x_n\|^2\right]$.

Preuve :

- Supposons par l'absurde que

$$\forall \delta > 0 \quad \exists y \; tq \; \tilde{f}(y) \leq \tilde{f}(p_f(x_n)) + \delta \quad \text{et} \quad \frac{x_n - y}{t_n} \notin \partial_{\varepsilon_n} f(x_n).$$

- Dans ce cas, en prenant $\delta = \frac{1}{k}$ on obtient

$$\forall k \quad \exists y_k \quad tq \quad \tilde{f}(y_k) \leq \tilde{f}(p_f(x_n)) + \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \frac{x_n - y_k}{t_n} \notin \partial_{\varepsilon_n^k} f(x_n) \qquad (2.9)$$

où $\varepsilon_n^k = K\left[f(x_n) - f(y_k) - \frac{m}{t_n}\|y_k - x_n\|^2\right]$.

Or par définition $p_f(x_n)$ minimise $\tilde{f}$. Dès lors, pour tout *k* $\tilde{f}(p_f(x_n)) \leq \tilde{f}(y_k)$.
Il résulte donc de la relation (2.9) que

$$\forall k \, \exists y_k \quad tq \quad \tilde{f}(p_f(x_n)) \leq \tilde{f}(y_k) \leq \tilde{f}(p_f(x_n)) + \frac{1}{k}.$$

En faisant tendre *k* vers l'infini, on en déduit que

$$\tilde{f}(p_f(x_n)) \leq \lim_{k \to \infty} \tilde{f}(y_k) \leq \tilde{f}(p_f(x_n)) + 0$$

Et par conséquent

$$\tilde{f}(y_k) \to \tilde{f}(p_f(x_n)). \qquad (2.10)$$

- Par ailleurs, la forte convexité de $\widetilde{f}$ implique que $y_k \to p_f(x_n)$.

En effet, comme $p_f(x_n)$ minimise $\widetilde{f}$

$$\widetilde{f}(p_f(x_n)) \leq \widetilde{f}(\lambda y_k + (1-\lambda) p_f(x_n)).$$

Dès lors puisque $\widetilde{f}$ est fortement convexe de module $\frac{1}{t_n}$ (voir proposition 2.2)

$$\widetilde{f}(p_f(x_n)) \leq \lambda \widetilde{f}(y_k) + (1-\lambda)\widetilde{f}(p_f(x_n)) - \frac{1}{2t_n}\lambda(1-\lambda)\|y_k - p_f(x_n)\|^2$$

et donc, puisque le dernier terme du membre de droite de l'inégalité est négatif

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(p_f(x_n)) &\leq \lambda \widetilde{f}(y_k) + (1-\lambda)\widetilde{f}(p_f(x_n)) - \frac{1}{2t_n}\lambda(1-\lambda)\|y_k - p_f(x_n)\|^2 \\ &\leq \lambda \widetilde{f}(y_k) + (1-\lambda)\widetilde{f}(p_f(x_n)).\end{aligned}$$

On a donc en passant à la limite sur k puisque $\widetilde{f}(y_k) \to \widetilde{f}(p_f(x_n))$,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(p_f(x_n)) &\leq \lambda \widetilde{f}(p_f(x_n)) + (1-\lambda)\widetilde{f}(p_f(x_n)) - \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2t_n}\lambda(1-\lambda)\|y_k - p_f(x_n)\|^2 \\ &\leq \lambda \widetilde{f}(p_f(x_n)) + (1-\lambda)\widetilde{f}(p_f(x_n))\end{aligned}$$

ou encore

$$\widetilde{f}(p_f(x_n)) \leq \widetilde{f}(p_f(x_n)) - \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2t_n}\lambda(1-\lambda)\|y_k - p_f(x_n)\|^2 \leq \widetilde{f}(p_f(x_n)).$$

Dès lors, $\|y_k - p_f(x_n)\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $y_k \to p_f(x_n)$. (2.11)

Il résulte donc des relations (2.10),(2.11) et de la définition de $\widetilde{f}$ que

$$f(y_k) \to f(p_f(x_n)).$$

Par conséquent

$$\varepsilon_n^k = K\left[f(x_n) - f(y_k) - \frac{m}{t_n}\|y_k - x_n\|^2\right] \to \varepsilon' \qquad (2.12)$$

où $\varepsilon' = K\left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{m}{t_n}\|p_f(x_n) - x_n\|^2\right]$

et

$$\frac{x_n - y_k}{t_n} \to \frac{x_n - p_f(x_n)}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_0} f(x_n) \qquad (2.13)$$

où $\varepsilon_0 = f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{1}{t_n}\|x_n - p_f(x_n)\|^2$.

- De plus, comme par hypothèse x_n ne minimise pas $f, x_n \neq p_f(x_n)$.

  En effet, comme $\gamma_n \in \partial f(p_f(x_n))$, si x_n était égal à $p_f(x_n)$, on aurait $\gamma_n = \dfrac{x_n - p_f(x_n)}{t_n} = 0 \in \partial f(x_n)$. Ce qui impliquerait par les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'une fonction convexe (voir proposition V.1 en annexe) que x_n minimise *f*, contrairement à notre hypothèse.

  Dès lors, le terme $\left\|x_n - p_f(x_n)\right\|^2$ qui intervient dans la définition des nombre ε' et ε_0 est non nul et par conséquent $\varepsilon' > \varepsilon_0$.

  En effet, par définition

$$\varepsilon' = K\left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{m}{t_n}\left\|p_f(x_n) - x_n\right\|^2\right].$$

  Par ailleurs K est supérieur ou égal à 1 par hypothèse.

  * Supposons d'abord que K soit strictement supérieur à 1.
  Dans ce cas $\varepsilon' > \left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \dfrac{m}{t_n}\left\|p_f(x_n) - x_n\right\|^2\right]$ et donc, puisque $m \leq 1$ on a forcément par définition de ε_0 que $\varepsilon' > \varepsilon_0$.

  * Supposons d'autre part que $K = 1$.
  Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= K\left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{m}{t_n}\left\|p_f(x_n) - x_n\right\|^2\right] \\ &= \left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{m}{t_n}\left\|p_f(x_n) - x_n\right\|^2\right]\end{aligned} \tag{2.14}$$

  et donc, puisque dans les inégalités $m \leq 1$ et $K \geq 1$, il doit y en avoir une qui soit une inégalité stricte, il faut absolument que $-m > -1$. Par conséquent, puisque $\left\|x_n - p_f(x_n)\right\|^2 \neq 0$, il résulte de la relation (2.14) que

$$\begin{aligned}\varepsilon' &> \left[f(x_n) - f(p_f(x_n)) - \frac{1}{t_n}\left\|p_f(x_n) - x_n\right\|^2\right] \\ &= \varepsilon_0.\end{aligned}$$

- Montrons à présent que pour tout y $f(y) > f(x_n) - \varepsilon' + < \dfrac{x_n - p_f(x_n)}{t_n}, y - x_n >$.

  - Pour cela , vérifions d'abord que la fonction f^* est finie.
    En effet, par hypothèse *f* est coercive, dès lors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

    D'où, par définition de la limite

$$\forall\, a \in R \quad \exists\, b \in R \quad \text{tq} \quad \forall x \quad \|x\| > b \quad \Rightarrow \quad f(x) > a\|x\|.$$

    Donc, si on combine la relation précédente avec l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\forall a \in R \ \exists b \in R \ \text{tq} \quad \sup_{\|y\|>b} < y,a > -f(y) \leq \|y\|\|a\| - a\|y\| = 0 < \infty.$$

Par ailleurs, f étant par hypothèse semi-continue inférieurement, la fonction $< y,a > -f(y)$ est une fonction semi-continue supérieurement en la variable y pour tout a. Elle atteint donc sa borne supérieure sur tout compact et dès lors

$$\forall a \in R \quad \sup_{\|y\|\leq b} < y,a > -f(y) < \infty.$$

Par conséquent, il résulte des deux inégalités précédentes que

$$\forall a \in R \quad f^*(a) \overset{déf}{=} \sup_y < y,a > -f(y) < \infty.$$

- Essayons ensuite de caractériser l'ensemble $\partial_{\varepsilon_0} f(x)$.
  Par la définition du ε_0-sous-différentiel de f en x, $\gamma \in \partial_{\varepsilon_0} f(x)$ si et seulement si pour tout y

$$f(y) \geq f(x) + < y - x, \gamma > -\varepsilon_0$$

ou encore si et seulement si pour tout y

$$-f(x) + \varepsilon_0 \geq < y, \gamma > -f(y) - < x, \gamma >.$$

Dès lors, par définition de la borne supérieure d'une fonction, $\gamma \in \partial_{\varepsilon_0} f(x)$ si et seulement si

$$-f(x) + \varepsilon_0 \geq \sup_y (< y, \gamma > -f(y)) - < x, \gamma >$$

et donc si on définit la conjuguée de f par la fonction convexe

$$f^*(\gamma) = \sup_y (< y, \gamma > -f(y)),$$

on obtient que $\gamma \in \partial_{\varepsilon_0} f(x)$ si et seulement si

$$-f(x) + \varepsilon_0 \geq f^*(\gamma) - < x, \gamma >.$$

Par conséquent $\partial_{\varepsilon_0} f(x) = \{\gamma \in R^n : f^*(\gamma) - < \gamma, x > \leq -f(x) + \varepsilon_0\}$.

- Dès lors, puisque $\varepsilon' > \varepsilon_0$

$$\partial_{\varepsilon_0} f(x) \subseteq \{\gamma \in R^n : f^*(\gamma) - < \gamma, x > < \varepsilon' - f(x)\}.$$

En combinant ce résultat avec la relation (2.13) on en déduit que

$$\frac{x_n - p_f(x_n)}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_0} f(x_n) \subseteq \{\gamma \in R^n \quad tq \quad f^*(\gamma) - < \gamma, x_n > + f(x_n) - \varepsilon' < 0\}$$

et donc puisque f^* est une fonction convexe partout finie et que par conséquent elle est continue (voir proposition I.16 en annexe),l'inclusion précédente peut se réécrire grâce à la caractérisation de $\partial_{\varepsilon'} f(x_n)$ comme suit :

$$\partial_{\varepsilon_0} f(x_n) \subseteq \operatorname{int} \partial_{\varepsilon'} f(x_n).$$

Il résulte donc de la définition du sous-différentiel que

$$\forall y \quad f(y) > f(x_n) + < \frac{x_n - p_f(x_n)}{t_n}, y - x_n > -\varepsilon'. \tag{2.15}$$

- Montrons finalement que l'hypothèse que nous avons supposée par l'absurde contredit la relation (2.15).

  En effet, dans cette hypothèse, on a supposé que $\frac{x_n - y_k}{t_n} \notin \partial_{\varepsilon_n^k} f(x_n)$. Dès lors, par définition du ε_n^k-sous-différentiel

$$\exists y \quad tq \quad f(y) < f(x_n) + < \frac{x_n - y_k}{t_n}, y - x_n > -\varepsilon_n^k.$$

  Et donc en passant à la limite, il résulte des relations (2.11) et (2.12) que

$$\exists y \quad tq \quad f(y) \leq f(x_n) + < \frac{x_n - p_f(x_n)}{t_n}, y - x_n > -\varepsilon',$$

  ce qui contredit la relation (2.15).

□

2.3.2 Implémentation de l'algorithme proximal

Dans l'algorithme suivant, on suppose qu'on dispose d'un algorithme pour engendrer une suite minimisante (y_k) de $\tilde{f}$ à partir du point x_n.

Algorithme implémentable

Fixons $K > 1$ et $m \in \left]0,1\right[$.
Choisissons $x_1 \in R^n$ et posons $n = k = 1$.

PAS 1 : Prenons $y_k = y_1$.
PAS 2 : Posons

$$\varepsilon_n^k = K\left[f(x_n) - f(y_k) - \frac{m}{t_n}\|y_k - x_n\|^2 \right].$$

Si $\frac{x_n - y_k}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n^k} f(x_n)$, alors aller au pas 3

sinon calculer y_{k+1}, et poser $k = k+1$ et recommencer le pas 2.

PAS 3 : Posons $x_{n+1} = y_k, n = n+1$ et retournons au pas 1.

2.3.3 Convergence de l'implémentation de l'algorithme proximal

Proposition 2.6

Soit (x_n) une suite engendrée par l'algorithme implémentable.
Si f est coercive,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$$

alors $f(x_n) \to \inf_{R^n} f$.

Preuve :

Par le paragraphe 2.3.1 on a, pour tout n, $\frac{x_n - x_{n+1}}{t_n} = \gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ avec

$$\varepsilon_n = K\left[f(x_n) - f(x_{n+1}) - \frac{m}{t_n}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \right] \geq 0.$$

On peut réexprimer ε_n en fonction de γ_n, on obtient ainsi

$$\varepsilon_n = K\left[f(x_n) - f(x_{n+1}) - \frac{m}{t_n}\|t_n\gamma_n\|^2 \right] \geq 0$$

ou encore

$$\varepsilon_n = K\left[f(x_n) - f(x_{n+1}) - mt_n\|\gamma_n\|^2 \right] \geq 0.$$

Dès lors

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - mt_n\|\gamma_n\|^2 \leq f(x_n).$$

$(f(x_n))$ est donc une suite décroissante. Par conséquent, elle tend soit vers $-\infty$, soit vers f^* sa borne inférieure.

- Supposons d'abord que $f(x_n)$ tende vers $-\infty$.
  Dans ce cas, il est évident que $f(x_n) \to \inf_{R^n} f(x)$.
- Supposons ensuite que $f(x_n)$ tende vers $f^* \in R$.
  Dans ce cas, en passant à la limite dans l'inégalité

  $$0 \leq m\, t_n\|\gamma_n\|^2 \leq f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

  On obtient

  $$0 \leq m \lim_{n\to\infty} t_n\|\gamma_n\|^2 \leq f^* - f^* = 0$$

  et donc

  $$m\, t_n\|\gamma_n\|^2 \to 0.$$

  Par conséquent $\varepsilon_n \to K[f^* - f^* - 0] = 0$.
  Il suffit alors d'appliquer la proposition 1.3 pour obtenir $f(x_n) \to \inf f(x)$.

□

CHAPITRE 3 : METHODE PROXIMALE A METRIQUE VARIABLE

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on généralisera l'algorithme proximal en prenant pour métrique une métrique variable.

$\|y - x_n\|^2$ sera donc remplacé par $< y - x_n, M_n(y - x_n) >$ où M_n est une matrice symétrique définie positive.

L'algorithme considéré est donc le suivant :

Soit $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement (s.c.i).

Algorithme 3.1

PAS 0 (Initialisation) :
- Choisir $x_1 \in R^n, M_1$ matrice symétrique définie positive (d.p).
- Poser $n = 1$.

PAS 1 : Calculer la solution $y = x_{n+1}$

de $\min\limits_{y \in R^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \right\}$.

PAS 2 :
- Choisir une nouvelle matrice symétrique d.p M_{n+1}.
- Remplacer n par n+1.
- Retourner au pas 1.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons de manière plus détaillée cet algorithme.

A cette fin, nous montrerons d'abord que l'algorithme ci-dessus est bien défini (voir paragraphe 3.2).

Ensuite, comme pour le cas de l'algorithme proximal, nous essayerons d'exprimer une itération de l'algorithme décrit ci-dessus en fonction du sous-différentiel de f (voir paragraphe 3.3).

Finalement, dans le paragraphe 3.4, nous étudierons la convergence de cet algorithme. Nous séparerons notre analyse de convergence en considérant d'une part que les matrices M_n sont des matrices quelconques et d'autre part que ces matrices sont proportionnelles à une matrice M donnée.

Notons cependant que dans ce chapitre on ne pourra plus se baser sur la convergence de l'algorithme du ε-sous-différentiel pour étudier la convergence de notre algorithme.

3.2 BIEN FONDE DE L'ALGORITHME PROXIMAL A METRIQUE VARIABLE.

Dans l'algorithme proximal à métrique variable, comme on vient de le voir, on génère une suite (x_n) telle que

$$x_{n+1} = \underset{y \in R^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \right\}$$

où M_n est une matrice symétrique définie positive.

Pour que cet algorithme ait un sens, il faut évidemment que la fonction $\tilde{\tilde{f}}(y) = f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$ possède un minimum en la variable y et que celui-ci soit unique.

Comme pour le cas proximal, l'existence du minimum va résulter du fait que $\tilde{\tilde{f}}$ est une fonction inf-compacte (voir proposition 3.1).

Proposition 3.1

Soit $f(\cdot): R^n \to R \cup \{+\infty\}$ convexe propre s.c.i et M une matrice symétrique définie positive,
alors $f(\cdot) + \frac{1}{2} < M(\cdot - x), \cdot - x >$ est inf-compacte.

Rem. : la preuve est fort semblable à celle de la proposition 2.1.

Preuve :

- Montrons d'abord que les ensembles niveaux $\left\{ y \quad tq \quad f(y) + \frac{1}{2} < M(y - x), y - x > \leq \alpha \right\}$ sont fermés pour tout α.
  Vu que f est semi-continue inférieurement et que $< M(y - x), y - x >$ l'est aussi, on en déduit que leur somme $f(y) + \frac{1}{2} < M(y - x), y - x >$ est également une fonction semi-continue inférieurement. Par conséquent, ses ensembles niveaux sont fermés (voir proposition II.4 en annexe).

- Montrons ensuite que les ensembles niveaux sont bornés pour tout α.
  Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble niveau non borné.
  Dans ce cas, il existe une suite (y_k) qui vérifie $\|y_k - x\|_M \to \infty$ et

$$f(y_k) + \frac{1}{2}\|y_k - x\|_M^2 \leq \alpha \quad \forall k. \tag{3.1}$$

  Notons $\beta_k = \|y_k - x\|_M$. Comme β_k tend vers l'infini, on peut supposer que $\beta_k \geq 1$.
  Définissons $z_k = \frac{y_k - x}{\beta_k}$ et considérons la fonction $\hat{f}(y) = f(y + x)$.
  C'est une fonction convexe (cfr. démonstration de la proposition 2.1).

De plus pour tout k on a par définition de z_k

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2}=\hat{f}(y_k-x)+\frac{\|y_k-x\|_M^2}{2}.$$

Dès lors, par définition de $\hat{f}$ on a :

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2}=f(y_k)+\frac{\|y_k-x\|_M^2}{2}.$$

On en déduit donc, en utilisant l'inégalité (3.1) que

$$\hat{f}(\beta_k z_k)+\frac{\beta_k^2}{2}\leq\alpha .$$

D'autre part, comme par définition de z_k , $\|z_k\|_M=1$, on a

$$\begin{aligned}\min_{\|z\|_M=1}\hat{f}(z)&\leq\hat{f}(z_k)\\&=\hat{f}\left(\frac{1}{\beta_k}(\beta_k z_k)+\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\cdot 0\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de convexité de $\hat{f}$, on en déduit

$$\min_{\|z\|_M=1}\hat{f}(z)\leq\frac{1}{\beta_k}\hat{f}(\beta_k z_k)+\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\hat{f}(0)$$

c'est-à-dire

$$\beta_k\min_{\|z\|_M=1}\hat{f}(z)+(1-\beta_k)\hat{f}(0)\leq\hat{f}(\beta_k z_k),$$

ou encore

$$\hat{f}(0)+\beta_k\left(\min_{\|z\|_M=1}\hat{f}(z)-\hat{f}(0)\right)\leq\hat{f}(\beta_k z_k).$$

Par ailleurs on vient de voir que $\hat{f}(\beta_k z_k)\leq\alpha-\frac{\beta_k^2}{2}$, dès lors

$$\hat{f}(0)+\beta_k\left(\min_{\|z\|_M=1}\hat{f}(z)-\hat{f}(0)\right)+\frac{\beta_k^2}{2}\leq\alpha\qquad\forall k.$$

Ceci est impossible.
En effet, le premier membre de l'inégalité est un polynôme du second degré en β_k.
Par conséquent, à partir d'un certain k ce polynôme va dépasser α.

□

L'unicité du minimum va elle aussi résulter, comme dans le cas proximal, du fait que la fonction $\tilde{\tilde{f}}(y) = f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$ est fortement convexe (voir proposition 3.2), et donc strictement convexe.

Proposition 3.2

Soit $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre, s.c.i et M une matrice symétrique d.p.
Alors $\tilde{\tilde{f}}(\cdot) = f(\cdot) + \frac{1}{2} < M(\,\cdot - x), \cdot - x >$ est fortement convexe, c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0 \quad tq \quad \forall y, \forall z \in R^n, \quad \forall \lambda \in]0,1[$$
$$\tilde{\tilde{f}}(\lambda z + (1-\lambda) y) \le \lambda \tilde{\tilde{f}}(z) + (1-\lambda) \tilde{\tilde{f}}(y) - \frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \|z - y\|_M^2 .$$

Remarque : La preuve est fort semblable à celle de la proposition 2.2.

Preuve :

- Montrons d'abord que $g(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot - x\|_M^2$ est fortement convexe de module 1.
  Comme $\nabla g(z) = M(z - x)$ et $\nabla g(y) = M(y - x)$, on a
  $$< \nabla g(y) - \nabla g(z,) y - z > \;=\; < M(y - z), y - z > \;=\; \|y - z\|_M^2 .$$
  Par conséquent, g est donc fortement convexe de module 1 (voir proposition I.10 en annexe).

- Montrons ensuite que $\tilde{\tilde{f}}$ est fortement convexe de module 1.
  Comme f est une fonction convexe et g une fonction fortement convexe de module 1, la somme de ces deux fonctions, à savoir la fonction $\tilde{\tilde{f}}$, est une fonction fortement convexe de module 1 (voir proposition I.10 en annexe).
  On a donc la thèse en prenant $\alpha = 1$.

□

3.3 LIEN ENTRE ITERATION PROXIMALE A METRIQUE VARIABLE ET SOUS-DIFFERENTIEL

Dans ce paragraphe, on réexprimera l'itération proximale à métrique variable

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \underset{y \in R^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \right\} \\ &= \underset{y \in R^n}{\operatorname{argmin}} \tilde{\tilde{f}}(y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

en fonction du sous-gradient de f comme on l'a fait au chapitre 2.

Or par les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'une fonction convexe (voir proposition V.1 en annexe), on peut réexprimer l'itération proximale (3.2) sous la forme

$$0 \in \partial\tilde{\tilde{f}}(x_{n+1}). \tag{3.3}$$

Par ailleurs, la fonction $\frac{1}{2}\left\| \cdot - x_n \right\|_{M_n}^2$ est continue sur dom $f \cap$ dom $\frac{\left\| \cdot - x_n \right\|_{M_n}^2}{2}$ et donc, par les règles d'addition de 2 sous-différentiels, on obtient (voir proposition IV.9 en annexe) que

$$\partial\tilde{\tilde{f}}(y) = \partial\left[f(y) + \frac{1}{2}\left\| y - x_n \right\|_{M_n}^2 \right] = \partial f(y) + M_n(y - x_n).$$

La relation (3.3) peut donc se réécrire

$$0 \in \partial f(x_{n+1}) + M_n(x_{n+1} - x_n),$$

ou encore

$$M_n(x_n - x_{n+1}) \in \partial f(x_{n+1}).$$

On en déduit donc, en posant $\gamma_n = M_n(x_n - x_{n+1})$ que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$.

Par conséquent l'itération proximale à métrique variable peut se mettre sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - M_n^{-1}\gamma_n \quad \text{où} \quad \gamma_n \in \partial f(x_{n+1}). \tag{3.4}$$

Rappelons-nous que pour étudier la convergence de l'algorithme proximal on s'est basé sur la convergence de l'algorithme du ε - sous différentiel.
On ne peut plus procéder comme cela ici, car cette fois, l'algorithme que l'on a n'est plus un cas particulier de la méthode du ε - sous-différentiel.
En effet, on a vu que x_{n+1} pouvait s'écrire $x_{n+1} = x_n - M_n^{-1}\gamma_n$, mais ici M_n^{-1} est une matrice et non plus un scalaire.

Pour étudier la convergence de notre algorithme on va devoir se baser sur la proposition suivante.

Proposition 3.3

Si $x_{n+1} = \text{argmin}\ \tilde{\tilde{f}}(y)$, alors $x_{n+1} = x_n - M_n^{-1}\gamma_n$ où $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ $\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq 0,$ (3.5) $\lambda_{\min}(M_n^{-1})$ étant la plus petite valeur propre de M_n^{-1}.

Preuve :

Supposons par hypothèse que $x_{n+1} = \text{argmin}\ \tilde{\tilde{f}}(y)$ et montrons que $x_{n+1} = x_n - M_n^{-1}\gamma_n$ où $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ et $\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq 0$.
En effet, par le paragraphe 3.3 et la relation (3.4), on sait que l'itération proximale à métrique variable $x_{n+1} = \text{argmin}\ \tilde{\tilde{f}}(y)$ peut se réécrire sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - M_n^{-1}\gamma_n \tag{3.6}$$

où $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$. (3.7)

Dès lors, par la définition du sous-différentiel de f en x_{n+1} (voir annexe IV.1 en annexe), on obtient

$$f(x_n) \geq f(x_{n+1}) + < \gamma_n, x_n - x_{n+1} >.$$

D'où, en utilisant la relation (3.6) on en déduit que

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq < \gamma_n, M_n^{-1}\gamma_n >.$$

Par ailleurs, on a par les propriétés du quotient de Rayleigh et la définition de $\lambda_{\min}(M_n^{-1})$ que $< \gamma_n, M_n^{-1}\gamma_n > \geq \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2$ (voir proposition VI.5 en annexe), dès lors

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2. \tag{3.8}$$

Par conséquent

$$\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq 0.$$

Pour prouver la thèse, il reste donc à voir que $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$.

Or $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$, d'où par définition du sous-différentiel de f en x_{n+1}, on a

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_{n+1} >$$

et donc comme ajouter le terme $f(x_n) - f(x_n)$ au membre de droite de l'inégalité revient à ajouter un terme nul, on a

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) - f(x_n) + \underline{f(x_n)} + \underline{< \gamma_n, y - x_{n+1} >}$$

et donc, en décomposant $y - x_{n+1}$ en fonction de $x_n - x_{n+1}$, il résulte que

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_{n+1}) - f(x_n) + \underline{f(x_n)} + \underline{< \gamma_n, y - x_n >} + < \gamma_n, x_n - x_{n+1} >.$$

Dès lors, par la relation (3.6) on en déduit que

$$\forall y \quad f(y) \geq \underline{f(x_n)} + \underline{< \gamma_n, y - x_n >} - f(x_n) + f(x_{n+1}) + < \gamma_n, M_n^{-1} \gamma_n >$$

et donc en réutilisant les propriétés du quotient de Rayleigh on obtient

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - f(x_n) + f(x_{n+1}) + \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2.$$

D'où, par définition de ε_n il résulte que

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - \varepsilon_n.$$

Par conséquent, puisque ε_n est positif (cfr. hypothèse (3.5)) on en déduit par définition du ε_n-sous-différentiel que

$$\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n).$$

$\square$

3.4 CONVERGENCE

Nous allons d'abord étudier la convergence de l'algorithme 3.1 sans faire aucune hypothèse sur les matrices M_n.
Après quoi, nous étudierons la convergence de cet algorithme lorsque les matrices M_n sont proportionnelles à une matrice M fixée.

3.4.1 Convergence de l'algorithme avec métrique quelconque

Pour établir la convergence de l'algorithme 3.1, les deux lemmes suivants sont indispensables.

Lemme 3.1

> Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable,
> alors $(f(x_n))$ est décroissante.

Preuve :
Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable. Par la proposition précédente $\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq 0$. Par conséquent $f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2$.

Par ailleurs, comme M_n est une matrice définie positive $\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq 0$ (voir proposition VI.2 en annexe).
Dès lors

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n).$$

$(f(x_n))$ est donc une suite décroissante.

□

Lemme 3.2

> Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable, alors
> i) Si $(f(x_n))$ est bornée inférieurement,
> alors
> $$\begin{cases} \varepsilon_n \to 0 \\ \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0. \end{cases}$$
> ii) Si de plus $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = \infty$ alors 0 est un point d'accumulation de (γ_n).

Preuve :

i) Supposons par hypothèse que $(f(x_n))$ soit bornée inférieurement et montrons que $\varepsilon_n \to 0 \; et \; \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0$.

Comme $(f(x_n))$ est une suite décroissante (voir lemme 3.1) et que par hypothèse elle est bornée inférieurement, elle converge vers un nombre f^* réel. De plus, par la relation (3.5)

$$\varepsilon_n = f(x_n) - f(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2.$$

D'où

$$\varepsilon_n + \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 = f(x_n) - f(x_{n+1}).$$

En sommant de n allant de 1 jusque l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty} f(x_1) - f(x_{n+1}) \\ &= f(x_1) - f^* < \infty.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 < \infty.$$

On a donc $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$ (3.9) et $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 < \infty$. (3.10)

Dès lors, comme le terme général d'une série qui converge tend vers 0

$$\varepsilon_n \to 0 \; et \; \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0.$$

ii) Supposons de plus que $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1}) = \infty$ et montrons que zéro est un point d'accumulation de (γ_n).

Supposons par l'absurde que zéro ne soit pas un point d'accumulation de (γ_n). Dans ce cas $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n$ $\|\gamma_n\| \geq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1}).$$

Donc, comme par hypothèse $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1}) = \infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 = \infty,$$

ce qui est en contradiction avec la relation (3.10).

□

La proposition suivante établit la convergence de l'algorithme 3.1.

<u>Proposition 3.4</u>

> Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable.
> Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = \infty$ et si (x_n) est bornée,
> alors $f(x_n) \to \inf f(x)$ et toutes les valeurs d'adhérence de (x_n) sont des minima de f.

<u>Preuve</u> :

- Montrons d'abord que $f(x_n) \to \inf f(x)$.
  - Comme f est une fonction convexe, elle est minorée par une fonction affine (voir proposition I.9 en annexe). Dès lors
  $$\exists s \in R^n, b \in R \text{ tq } f(x_n) \geq < s, x_n > -b.$$
  En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $f(x_n) \geq -\|s\| \; \|x_n\| - b$.
  Or comme par hypothèse (x_n) est bornée $\exists\, M \geq 0 \quad tq \quad \forall n \quad \|x_n\| \leq M$.
  Par conséquent
  $$f(x_n) \geq -(\|s\| M + b).$$
  $(f(x_n))$ est donc bornée inférieurement. Comme de plus, on sait par le lemme 3.1 que cette suite est décroissante, on en déduit qu'elle converge vers sa borne inférieure $f^* \in R$.
  - D'autre part, on sait grâce à la proposition 3.3 que $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$, on a donc par définition du ε_n-sous-différentiel de f en x_n
  $$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > -\varepsilon_n. \qquad (3.11)$$
  Par ailleurs, en appliquant le lemme 3.2, on sait que
  $$\exists\, N_1 \subseteq N \text{ tq } \gamma_n \to 0 \text{ et } \varepsilon_n \to 0 \text{ pour } n \in N_1. \qquad (3.12)$$
  Dès lors, en utilisant l'hypothèse que (x_n) est une suite bornée, on en déduit que
  $$\exists\, N_1 \subseteq N \text{ tq } < \gamma_n, y - x_n > \to 0 \text{ et } \varepsilon_n \to 0 \text{ pour } n \in N_1.$$
  Par conséquent, en passant à la limite dans N_1 dans la relation (3.11), il résulte que
  $$\forall y \quad f(y) \geq f^*.$$
  On en déduit donc par définition de la borne inférieure de f que $f^* \leq \inf f$.
  Comme par ailleurs $f^* \geq \inf f$, il en découle que
  $$f^* = \inf f.$$

- Montrons ensuite que toutes les valeurs d'adhérence de (x_n) sont des minima de f. Par hypothèse la sous-suite $(x_n)_{n\in N_1}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite qui converge. Dès lors

$$\exists N_2 \subseteq N_1 \subseteq N, \ \exists x^* \in R^n \text{ tq } x_{n+1} \to x^* \text{ pour } n \in N_2. \qquad (3.13)$$

Par ailleurs, il résulte de la relation (3.4) que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$ (3.14)
et de la relation (3.12) que $\gamma_n \to 0$ *pour* $n \in N_2$. (3.15)

Par conséquent, en utilisant le caractère fermé de l'application sous-différentiel et les relations (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient que $0 \in \partial f(x^*)$ (voir proposition IV.5 en annexe).

Dès lors, on en déduit que x^* est un minimum de f (voir proposition V.1 en annexe).

□

Remarque :
Quand (x_n) n'est pas bornée, on ne sait pas dire si $f(x_n) \to \inf f(x)$.
Pour cela, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, il faut que pour tout n, M_n soit proportionnelle à une matrice M symétrique définie positive !

3.4.2 Convergence de l'algorithme où la métrique varie en restant proportionnelle à une matrice M symétrique définie positive.

Dans la suite de ce paragraphe, on supposera que $M_n = \mu_n M$ où $\mu_n > 0$ et M est une matrice symétrique définie positive.
Pour pouvoir montrer que $f(x_n) \to \inf f(x)$ ne nécessite plus de supposer que $(x_n)_{n\in N}$ soit bornée, on doit établir quelques résultats préliminaires. Ces résultats généraliseront les résultats que l'on a obtenu au chapitre 1.

3.4.2.1. Résultats préliminaires

Lemme 3.3

Soit ε_n tq $\gamma_n \in \partial f(x_n)$.
$\forall n, \forall y, \exists c > 0$ *tq*

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \le \|x_n - y\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right). \qquad (3.16)$$

Preuve :
Essayons d'abord de décomposer le membre de gauche de l'inégalité (3.16) en fonction des termes $x_{n+1} - x_n$ et $x_n - y$, on obtient ainsi

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 = \|x_{n+1} - x_n\|_M^2 + \|x_n - y\|_M^2 + 2 \ll x_{n+1} - x_n, x_n - y \gg \qquad (3.17)$$

où par convention $<< \cdot\,, \cdot >>$ désigne le produit scalaire $< M \cdot, \cdot >$.

Comme par ailleurs, $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ on obtient par définition du ε_n-sous-différentiel de f en x_n :

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - \varepsilon_n. \tag{3.18}$$

Or par définition de γ_n et par le choix de M_n on sait que $\gamma_n = M_n(x_n - x_{n+1}) = \mu_n M(x_n - x_{n+1})$. Par conséquent l'inégalité (3.18) peut se réécrire comme suit

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + \mu_n << x_n - x_{n+1}, y - x_n >> - \varepsilon_n. \tag{3.19}$$

On peut donc déduire des relations (3.17) et (3.18) :

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \leq \|x_n - y\|_M^2 + \|x_{n+1} - x_n\|_M^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right),$$

ou encore, puisque $\gamma_n = M_n(x_n - x_{n+1})$

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \leq \|x_n - y\|_M^2 + \|M_n^{-1}\gamma_n\|_M^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right)$$

et donc, comme on a choisi M_n pour que $M_n = \mu_n M$, on en déduit que

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \leq \|x_n - y\|_M^2 + \frac{1}{\mu_n^2}\|M^{-1}\gamma_n\|_M^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right). \tag{3.20}$$

D'autre part $\|M^{-1}\gamma_n\|_M^2 = < \gamma_n, M^{-1}\gamma_n > = \|\gamma_n\|_{M^{-1}}^2$. Donc comme dans R^n, toutes les normes sont équivalentes, $\exists c > 0 \;:\; \|\gamma_n\|_{M^{-1}}^2 \leq c\|\gamma_n\|^2$. Par conséquent, il résulte de la relation (3.20) que

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \leq \|x_n - y\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right).$$

□

<u>Lemme 3.4</u>

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de (x_n) vérifiant $\|x_{n+1} - \bar{x}\|_M^2 \leq \|x_n - \bar{x}\|_M^2 + \delta_n$

où $\delta_n \geq 0$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$.

Alors toute la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$.

Preuve :

Afin de prouver que toute la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$, nous montrerons que
$\forall \delta > 0 \ \exists n_1 \in N$ tq $\forall n_2 \geq n_1 \ \left\|x_{n_2} - \bar{x}\right\|_M^2 \leq \delta$.

Par hypothèse $\bar{x}$ est une valeur d'adhérence de (x_n) et $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$. Dès lors, par définition de la limite $\forall \delta > 0 \quad \exists n_1 \quad \left\|x_{n_1} - \bar{x}\right\| \leq \frac{\delta}{2} \quad et \quad \sum_{n=n_1}^{\infty} \delta_n \leq \frac{\delta}{2}$.

D'autre part $\forall n_2 \geq n_1$ on a

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n_2} - \bar{x}\right\|_M^2 &\leq \left\|x_{n_2-1} - \bar{x}\right\|_M^2 + \delta_{n_2-1} \\
&\leq \left\|x_{n_2-2} - \bar{x}\right\|_M^2 + \delta_{n_2-1} + \delta_{n_2-2} \\
&\vdots \\
&\leq \left\|x_{n_1} - \bar{x}\right\|_M^2 + \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \delta_i \leq \delta .
\end{aligned}
$$

□

Les deux lemmes précédents nous permettent à présent d'établir la proposition suivante.

Proposition 3.5

Soit (x_n) une suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable.

Si
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty, \tag{3.21}$$
$$\varepsilon_n \to 0, \tag{3.22}$$
$$\frac{1}{\mu_n} \left\|\gamma_n\right\|^2 \to 0 \tag{3.23}$$
alors
$$f(x_n) \downarrow \inf_x f(x).$$

Preuve :

Par le lemme 3.1 $(f(x_n))$ est décroissante, elle converge donc soit vers sa borne inférieure, soit vers $-\infty$. Supposons par l'absurde que $f^* = \lim_{n\to\infty} f(x_n) > \inf f(x)$ et montrons que, dans ce cas, on contredit une des hypothèses du théorème.

Comme $f^* > \inf f(x)$, on a

$$\exists \delta > 0, \ \exists y \in R^n, \ \exists n_0 \in N \quad tq \quad \forall n \geq n_0 : f(y) < f(x_n) - \delta . \tag{3.24}$$

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\forall \delta > 0 \quad \forall y \quad \forall n: \quad f(y) \geq f(x_n) - \delta$

et en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ on obtiendrait que $\forall y \quad \forall n \quad f(y) \geq f(x_n) - \frac{1}{n}$, ce qui donnerait en passant à la limite $\forall y \quad f(y) \geq f^*$. Dès lors par définition de la borne inférieure de f on aurait $f^* \leq \inf f$, ce qui serait contraire à l'hypothèse supposée par l'absurde.

De plus par les relations (3.22) et (3.23) $\frac{1}{\mu_n}\|\gamma_n\|^2 \to 0$ et $\varepsilon_n \to 0$. Par conséquent

$$\frac{c}{\mu_n}\|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n \to 0 \quad \forall c \neq 0.$$

Donc, puisqu'on peut supposer sans perdre de généralité que n_0 est assez grand, on obtient finalement en utilisant la définition de la limite que

$$\forall n \geq n_0 \text{ et } \forall c \neq 0 \qquad \frac{c}{\mu_n}\|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n < \frac{\delta}{2}. \tag{3.25}$$

Or par le lemme 3.3,

$$\begin{aligned}
\exists c > 0 \quad tq \quad \|x_{n+1} - y\|_M^2 &\leq \|x_n - y\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right) \\
&\leq \|x_n - y\|_M^2 + \frac{2c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left(f(y) - f(x_n) + \varepsilon_n\right) \\
&\leq \|x_n - y\|_M^2 + \frac{2}{\mu_n}\left[\frac{c}{\mu_n}\|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n + f(y) - f(x_n)\right].
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.24) et (3.25) on en déduit finalement que

$$\|x_{n+1} - y\|_M^2 \leq \|x_n - y\|_M^2 - \frac{\delta}{\mu_n}$$

et en appliquant cette inégalité plusieurs fois de suite consécutivement, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - y\|_M^2 \quad &\leq \|x_{n-1} - y\|_M^2 - \frac{\delta}{\mu_{n-1}} - \frac{\delta}{\mu_n} \quad \leq \|x_{n-2} - y\|_M^2 - \frac{\delta}{\mu_{n-2}} - \frac{\delta}{\mu_{n-1}} - \frac{\delta}{\mu_n} \\
&\leq \quad \cdots \quad \leq \|x_{n_0} - y\|_M^2 - \delta \sum_{i=n_0}^{n} \frac{1}{\mu_i}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\|x_{n+1} - y\|_M^2 + \delta \sum_{i=n_0}^{n} \frac{1}{\mu_i} \leq \|x_{n_0} - y\|_M^2 < \infty$. et donc $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} < \infty$, ce qui contredit l'hypothèse (3.21).

□

Passons à présent à l'étude de la convergence de l'algorithme 3.1 dans le cas particulier où $M_n = \mu_n M$, M étant une matrice symétrique définie positive et $\mu_n > 0$.

3.4.2.2 Convergence

Voici pour commencer un résultat de convergence concernant la suite des images $\left(f(x_n)\right)$.

Proposition 3.6

> Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable avec $M_n = \mu_n\, M$ où M est symétrique définie positive et $\mu_n > 0$.
> Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$ alors $f(x_n) \to \inf f(x)$.

L'hypothèse que la suite (x_n) soit bornée n'est donc plus nécessaire pour que $f(x_n) \to \inf f$.

Preuve :

Par le lemme 3.1 $\left(f(x_n)\right)$ est décroissante. Elle converge donc, soit vers sa borne inférieure si elle est bornée inférieurement, soit vers $-\infty$.

- Supposons d'abord que la suite $\left(f(x_n)\right)$ tende vers $-\infty$.
  Dans ce cas, $\left(f(x_n)\right) \to \inf f$.
- Supposons ensuite que $\left(f(x_n)\right)$ soit bornée inférieurement et montrons que toutes les hypothèses de la proposition 3.5 sont satisfaites ; nous pourrions alors en effet en déduire immédiatement la thèse.
  Par hypothèse $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$. De ce fait, la première hypothèse de la proposition 3.5 est vérifiée.
  De plus, en appliquant le lemme 3.2

$$\|\gamma_n\|^2 \lambda_{\min}\left(M_n^{-1}\right) \to 0 \quad et \quad \varepsilon_n \to 0.$$

  Dès lors en utilisant le fait que $M_n = \mu_n\, M$, on obtient

$$\varepsilon_n \to 0 \quad et \quad \frac{1}{\mu_n} \lambda_{\min}\left(M^{-1}\right)\|\gamma_n\|^2 \to 0,$$

  c'est-à-dire

$$\varepsilon_n \to 0 \quad et \quad \frac{1}{\mu_n}\|\gamma_n\|^2 \to 0.$$

  Les hypothèses (3.21), (3.22) et (3.23) de la proposition 3.5. sont donc vérifiées.

□

Le résultat suivant nous assure la convergence de la suite (x_n) vers un minimum de f.

Proposition 3.7

Soit (x_n) la suite engendrée par l'algorithme proximal à métrique variable où $M_n = \mu_n M$ avec M symétrique définie positive et $\mu_n > 0$.
Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty,$$

$$\inf\{\mu_i\} = \overline{\mu} > 0,$$

f possède un minimum.

Alors $x_n \to \overline{x}$ min. de f.

Notons que nous n'avons plus besoin, ici non plus, du caractère borné de la suite (x_n) pour avoir la convergence.

Preuve :

- Montrons d'abord que la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence.
  Soit $\overline{x}$ un minimum de f. En appliquant le lemme 3.3 avec $y = \overline{x}$, on obtient

$$\exists c > 0 \text{ tq } \left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left[f(\overline{x}) - f(x_n) + \varepsilon_n\right].$$

  Dès lors, puisque $\overline{x}$ est un minimum de f et que par conséquent $f(\overline{x}) - f(x_n) \leq 0$, on en déduit

$$\left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n. \tag{3.26}$$

  En utilisant cette inégalité plusieurs fois de suite consécutivement, il résulte que

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 &\leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \\
&\leq \left\|x_{n-1} - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_{n-1}^2}\left\|\gamma_{n-1}\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_{n-1}}{\mu_{n-1}} + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \\
&\;\;\vdots \\
&\leq \left\|x_1 - \overline{x}\right\|_M^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{c}{\mu_i^2}\left\|\gamma_i\right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

De plus, en appliquant les relations (3.9) et (3.10) avec $M_n = \mu_n M$ on a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|\gamma_i\|^2}{\mu_i} < \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$. Dès lors, en utilisant le fait que la suite $\left(\frac{1}{\mu_i}\right)$ est bornée par $\frac{1}{\underline{\mu}}$ on en déduit que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|\gamma_i\|^2}{\mu_i^2} < \infty$ (3.28) et $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} < \infty$ (3.29).

Par conséquent, il résulte des relations (3.27), (3.28) et (3.29) que (x_n) est une suite bornée. Elle possède donc une valeur d'adhérence.

- Par ailleurs, on a par hypothèse que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$. Il résulte donc de la proposition 3.4 que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de *f*.

- Montrons finalement que toute la suite (x_n) tend vers un minimum $\bar{x}$ de *f*.

  Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Par la remarque précédente, $\bar{x}$ est un minimum de *f*.
  Dès lors, l'inégalité (3.26) est satisfaite et par conséquent

$$\left\|x_{n+1} - \bar{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \bar{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n.$$

Posons ensuite $\delta_n = \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n$, (3.30)

on a ainsi

$$\left\|x_{n+1} - \bar{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \bar{x}\right\|_M^2 + \delta_n.$$

D'autre part par la relation (3.30), il résulte que (δ_n) est une suite à termes positifs et de plus, il résulte des relations (3.28) et (3.29) que δ_n est le terme général d'une série convergente.

Par conséquent, il suffit d'appliquer le lemme 3.4 pour prouver la thèse.

□

CHAPITRE 4 : METHODE PROXIMALE A METRIQUE VARIABLE DE TYPE FAISCEAU

Ce chapitre comporte deux parties.

Dans la première partie, nous utiliserons l'algorithme proximal à métrique variable de type faisceau, qui est un algorithme assez général.

Ensuite dans la seconde partie, nous appliquerons cet algorithme dans un cas particulier.

4.1 1ère PARTIE : ETUDE D'UNE METHODE GENERALE

Dans l'algorithme proximal à métrique variable, calculer x_{n+1} est pratiquement impossible sauf si *f* est quadratique ou linéaire par morceau.

Par conséquent on remplacera l'itération proximale à métrique variable

$x_{n+1} = \text{argmin } f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$, où M_n est une matrice symétrique définie positive, par

$$y_k = \text{argmin } \varphi_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$$

où ϕ_k est une fonction convexe, à valeur dans R et plus simple que *f*.
On va tester si y_k est acceptable.
Dans ce cas on pose $x_{n+1} = y_k$ (pas sérieux) et dans le cas contraire on modifie le modèle ϕ_k et on reste en x_n (pas nul).

Dans la section suivante nous décrirons de manière précise l'algorithme ci-dessus. Comme cet algorithme fait intervenir un faisceau de fonctions ϕ_k, nous l'appellerons *algorithme proximal à métrique variable de type faisceau.*

Ensuite, à la section 4.1.2 nous énoncerons les critères auxquels doivent répondre les fonctions ϕ_k pour que l'algorithme ci-dessus converge.

Finalement, à la section 4.1.3 nous étudierons la convergence de cet algorithme.

4.1.1 Description de l'algorithme proximal à métrique variable de type faisceau

Dans ce chapitre, on suppose que $dom\, f = R^n$.

Décrivons de manière formelle l'algorithme que l'on a introduit ci-dessus.

Algorithme 4.1

Choisir $m \in]0,1[$, $x_1 \in R^n$ et M_1 une matrice symétrique définie positive.

Poser $y_1 = x_1$; $n = k = 1$.

PAS 1 (calcul d'un candidat)

Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait,

- choisir une nouvelle fonction φ_k convexe et à valeur dans R,
- calculer y_k =argmin $\varphi_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$ et $\gamma_k = M_n(x_n - y_k)$,
- calculer la décroissance prédite de la fonction f

$$\delta_n^k = f(x_n) - \varphi_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n > .$$

PAS 2 (pas de descente)

- Si $f(x_n) - f(y_k) \geq m\delta_n^k$ alors poser :
  - $x_{n+1} = y_k$,
  - mettre à jour la matrice M_n ,
  - augmenter n de 1.

PAS 3 (pas nul)

augmenter k de 1,
retourner au pas 1.

Pour que l'algorithme décrit ci-dessus ait un sens il faut que

$\varphi_k(\cdot) + \frac{1}{2} < M_n(\,. - x_n), \cdot - x_n >$ possède un minimum et que ce minimum soit unique.

Comme précédemment, l'existence du minimum résulte du fait que

$\varphi_k(\cdot) + \frac{1}{2} < M_n(\,. - x_n), \cdot - x_n >$ est inf - compacte (voir lemme 4.1 ci-après)

et l'unicité du minimum va résulter du fait que $\varphi_k(\cdot) + \frac{1}{2} < M_n(\,. - x_n), \cdot - x_n >$ est fortement convexe (voir lemme 4.1 ci-après).

Lemme 4.1 :

Soit M une matrice symétrique et définie positive. Alors $\varphi_k(\cdot)+\frac{1}{2}<M(\cdot-x),\cdot-x>$ est une fonction inf - compacte et fortement convexe.

Preuve :

Par hypothèse φ_k est une fonction convexe à valeur dans R.
φ_k est donc une fonction convexe et semi-continue inférieurement (voir proposition I.16 en annexe).

Il suffit alors d'appliquer les propositions 3.1 et 3.2 pour prouver la thèse.

□

Avant d'expliciter le choix du faisceau φ_k , formulons quelques remarques.

1) Par le lien qui existe entre l'itération proximale à métrique variable et le sous-différentiel (voir paragraphe 3.3), on sait que $\gamma_k \in \partial\varphi_k(y_k)$.
Dès lors par l'inégalité du sous-différentiel de φ_k en y_k, on a

$$\forall y \quad \varphi_k(y) \geq \varphi_k(y_k)+<\gamma_k, y-y_k>.$$

Par conséquent, si on note $l_k(y)=\phi_k(y_k)+<\gamma_k, y-y_k>$ on obtient alors

$$\forall y \quad l_k(y) \leq \varphi_k(y) \quad \forall k. \tag{4.1}$$

2) Si on note $\tilde{l}_k(y)=l_k(y)+\frac{1}{2}<M_n(y-x_n), y-x_n>$, alors

$$\tilde{l}_k(y)=\tilde{l}_k(y_k)+\frac{1}{2}<M_n(y-x_n), y-x_n>.$$

En effet, par définition

$$\tilde{l}_k(y)=l_k(y)+\frac{1}{2}<M_n(y-x_n), y-x_n>.$$

Par conséquent, il résulte par définition de $l_k(y)$ que

$$\tilde{l}_k(y)=\varphi_k(y_k)+<\gamma_k, y-y_k>+\frac{1}{2}<M_n(y-x_n), y-x_n>.$$

En remplaçant γ_k par sa valeur et en décomposant le terme $y-x_n$ en fonction de $y-y_k$ et y_k-x_n, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{l}_k(y)&=\varphi_k(y_k)+<M_n(x_n-y_k), y-y_k>+\frac{1}{2}<M_n(y-y_k), y-y_k>\\&\quad+\frac{1}{2}<M_n(y_k-x_n), y_k-x_n>+<M_n(y-y_k), y_k-x_n>\\&=\varphi_k(y_k)+\frac{1}{2}<M_n(y-y_k), y-y_k>+\frac{1}{2}<M_n(y_k-x_n), y_k-x_n>.\end{aligned}$$

Or par définition de l_k on a $l_k(y_k) = \phi_k(y_k)$, dès lors

$$\widetilde{l}_k(y) = l_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n > + \frac{1}{2} < M_n(y - y_k), y - y_k >$$

et donc, par définition de $\widetilde{l}_k$, on en déduit que

$$\widetilde{l}_k(y) = \widetilde{l}_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y - y_k), y - y_k >. \qquad (4.2)$$

4.1.2 Choix du faisceau

Les critères que nous allons imposer pour le choix des fonctions φ_k sont les suivants :

- $\varphi_k \leq f$, (4.3)
- $l_k \leq \varphi_{k+1}$, (4.4)
- $f(y_k) + < g_k, \cdot - y_k > \leq \varphi_{k+1}$ (4.5)

où g_k est un sous-gradient de f calculé en y_k.

Ces critères nous assurent que la décroissance souhaitée sur f, à savoir
$\delta_n^k = f(x_n) - \varphi_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n >$ est positive.

En effet, par définition (voir algorithme 4.1)

$$\delta_n^k = f(x_n) - \varphi_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n >.$$

Dès lors, comme $\varphi_k \leq f$ (voir (4.3))

$$\delta_n^k \geq \varphi_k(x_n) - \varphi_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n >. \qquad (4.6)$$

Par ailleurs, on sait par définition de y_k que

$$\varphi_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n > \leq \varphi_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \quad \forall y.$$

On a donc en particulier en prenant $y = x_n$ que

$$\varphi_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n > \leq \varphi_k(x_n).$$

Par conséquent il résulte de la relation (4.6) que $\delta_n^k \geq 0$.

4.1.3 Convergence

Comme d'habitude, notre analyse de convergence sera séparée en deux.
On supposera d'abord que la suite générée par l'algorithme 4.1 est finie.
Ensuite, à la section 4.1.3.2, on s'intéressera au cas où la suite générée par l'algorithme est infinie.

4.1.3.1 Suite finie

Proposition 4.1

Si l'algorithme 4.1 génère une suite finie $\{x_1 \cdots x_n\}$ alors x_n est optimal.

Preuve :

- Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux suites $(\tilde{l}_k(y_k))$ et $(f(y_k) - \varphi_k(y_k))$.
  - Montrons d'abord que la suite$(\tilde{l}_k(y_k))$ est une suite convergente.
    - * Par la relation (4.3), $\phi_{k+1} \leq f$. Par conséquent

$$f(x_n) \geq \varphi_{k+1}(x_n).$$

Dès lors, puisque ajouter $\frac{1}{2} < M_n(x_n - x_n), x_n - x_n >$ ne change rien à l'inégalité précédente (cela revient en effet à ajouter un terme nul), on a

$$f(x_n) \geq \varphi_{k+1}(x_n) + \frac{1}{2} < M_n(x_n - x_n), x_n - x_n >. \tag{4.7}$$

Donc, puisque par définition de y_{k+1}

$$\phi_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n > \leq \phi_{k+1}(x_n) + \frac{1}{2} < M_n(x_n - x_n), x_n - x_n >$$

il résulte de la relation (4.7) que

$$f(x_n) \geq \varphi_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n >. \tag{4.8}$$

* D'autre part, on sait que par définition $l_{k+1}(y_{k+1}) = \phi_{k+1}(y_{k+1})$. Par conséquent,

$$\varphi_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n >$$
$$= l_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n >$$

et donc, par définition de $\tilde{l}_{k+1}$

$$\varphi_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n > = \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}). \tag{4.9}$$

Dès lors, en combinant cette égalité avec la relation (4.8), on obtient

$$\varphi_{k+1}(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n > = \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) \leq f(x_n), \tag{4.10}$$

ce qui donne en utilisant la relation (4.4)

$$l_k(y_{k+1}) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - x_n), y_{k+1} - x_n > \leq \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) \leq f(x_n)$$

ou encore, par définition de $\tilde{l}_k$

$$\tilde{l}_k(y_{k+1}) \leq \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) \leq f(x_n).$$

Dès lors, par la remarque (4.2), il résulte que

$$\tilde{l}_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k > \leq \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) \leq f(x_n) \qquad (4.11)$$

et donc, puisque M_n est une matrice définie positive et que par conséquent $< M_n(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k >$ est positif, on a

$$\tilde{l}_k(y_k) \leq \tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) \leq f(x_n).$$

$(\tilde{l}_k(y_k))$ est donc une suite croissante et majorée par $f(x_n)$. Par conséquent, elle est convergente.

- Montrons ensuite que $f(y_k) - \varphi_k(y_k) \to 0$.
  * Comme $\phi_{k+1} \leq f$,

$$f(y_{k+1}) - f(y_k) \geq \varphi_{k+1}(y_{k+1}) - f(y_k).$$

De plus, par la relation (4.5)

$$f(y_k) + < g_k, y_{k+1} - y_k > \quad \leq \varphi_{k+1}(y_{k+1}).$$

Dès lors, en combinant les deux inégalités précédentes, on a

$$f(y_{k+1}) - f(y_k) \geq \varphi_{k+1}(y_{k+1}) - f(y_k) \geq < g_k, y_{k+1} - y_k >. \qquad (4.12)$$

  * Par ailleurs (y_n) est une suite bornée.

En effet, soit y fixé. Par les relations (4.1) et (4.3) $f \geq \phi_k \geq l_k$.

Dès lors, par définition de $\tilde{l}_k$ on a

$$f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \quad \geq \tilde{l}_k(y).$$

De plus, par la remarque (4.2) $\tilde{l}_k(y) = \tilde{l}_k(y_k) + \frac{1}{2} < M_n(y - y_k), y - y_k >$ et donc, comme $< M_n(y - y_k), y - y_k > = \|y - y_k\|_{M_n}$, on en déduit

$$f(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n > \quad \geq \tilde{l}_k(y_k) + \frac{1}{2}\|y - y_k\|_{M_n}^2.$$

Par ailleurs $\tilde{l}_k(y_k)$ étant une suite convergente, (y_k) est bornée et admet donc une valeur d'adhérence.

Par conséquent $< g_k, y_{k+1} - y_k > \to 0$. (4.13)

En effet, comme (y_k) est une suite bornée et $g_k \in \partial f(y_k)$, il résulte du caractère localement borné du sous-différentiel (voir proposition IV.5 en annexe) que (g_k) est une suite bornée.

Par conséquent, il suffit pour avoir $< g_k, y_{k+1} - y_k > \to 0$, de montrer que $y_{k+1} - y_k \to 0$.

Or, par la relation (4.11) et le caractère défini positif de M_n on sait que

$$\tilde{l}_{k+1}(y_{k+1}) - \tilde{l}_k(y_k) \geq \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k > \geq 0.$$

Dès lors, en passant à la limite dans cette inégalité, on obtient

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} < M_n(y_{k+1} - y_k), y_{k+1} - y_k > \geq 0$$

et donc, comme M_n est une matrice non singulière

$$y_{k+1} - y_k \to 0.$$

* De plus, f est une fonction à valeur dans R. Elle est donc localement Lipschitzienne (voir proposition I.16 en annexe). Dès lors, il existe un nombre L positif tel que pour tout k assez grand

$$0 \leq \left| f(y_{k+1}) - f(y_k) \right| \leq L \left\| y_{k+1} - y_k \right\|. \tag{4.14}$$

En effet, comme $y_{k+1} - y_k \to 0$, pour tout k assez grand,
il existe $\delta > 0$ tel que $y_{k+1} \in B(y_k, \delta)$ et donc par la locale Lipschitzité de f
$\exists L \geq 0$ tq $0 \leq \left| f(y_{k+1}) - f(y_k) \right| \leq L \left\| y_{k+1} - y_k \right\|$.

Par conséquent, comme $y_{k+1} - y_k \to 0$, il découle de la relation (4.14) que

$$f(y_{k+1}) - f(y_k) \to 0. \tag{4.15}$$

* Finalement, en passant à la limite dans l'inégalité (4.12) on a par les relations (4.13) et (4.15) que

$$\varphi_{k+1}(y_{k+1}) - f(y_k) \to 0$$

et donc comme d'autre part, on a

$$f(y_{k+1}) - f(y_k) \to 0,$$

on obtient

$$\varphi_{k+1}(y_{k+1}) - f(y_{k+1}) \to 0$$

ou encore

$$\varphi_k(y_k) - f(y_k) \to 0.$$

- Dans un second temps, montrons que

$$y_k \to p_{M_{\phi k}}(x_n) \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{argmin} \varphi_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >.$$

Pour cela prouvons que toute valeur d'adhérence $\bar{y}$ de (y_k) est égale à $p_{M_{\phi_k}}(x_n)$.

Si on arrive à démontrer cela, on aura bien prouvé que $y_k \to p_{M_{\phi_k}}(x_n)$.

* Or, par construction $\gamma_k \in \partial\varphi_k(y_k)$, dès lors, par définition du sous-différentiel

$$\forall y \quad \phi_k(y) \geq \varphi_k(y_k) + < \gamma_k, y - y_k >.$$

En combinant cette inégalité avec la relation (4.3) on obtient que pour tout y

$$f(y) \geq \varphi_k(y_k) + < \gamma_k, y - y_k >. \qquad (4.16)$$

* D'autre part, comme la suite (y_k) est bornée, elle admet au moins une valeur d'adhérence $\bar{y}$. Par conséquent $\exists\, K \subseteq N$ tq $y_k \to \bar{y}$ pour $k \in K$.

Dès lors, pour $k \in K$

a) $f(y_k) \to f(\bar{y})$ et $\varphi_k(y_k) \to f(\bar{y})$.

En effet, comme f est une fonction convexe et à valeur dans R, elle est continue (voir proposition I.16 en annexe) et donc par le théorème de réduction aux suites

$$f(y_k) \to f(\bar{y}).$$

De plus, on a vu que $\varphi_k(y_k) - f(y_k) \to 0$ et par conséquent, comme $f(y_k) \to f(\bar{y})$, on en déduit que

$$\varphi_k(y_k) \to f(\bar{y}).$$

b) $\gamma_k \to M_n(x_n - \bar{y}) = \bar{\gamma}$.

Cela provient du fait que $\gamma_k = M_n(x_n - y_k)$ et du fait que $y_k \to \bar{y}$ pour $k \in K$.

* Par conséquent, en passant à la limite sur K dans la relation (4.16) on en déduit que

$$\forall y \quad f(y) \geq f(\bar{y}) + < \bar{\gamma}, y - \bar{y} >.$$

Donc, par définition du sous-différentiel de f en $\bar{y}$

$$\bar{\gamma} \in \partial f(\bar{y}).$$

Il résulte dès lors de la définition de $\bar{\gamma}$ que

$$\bar{y} = x_n - M_n^{-1}\bar{\gamma} \quad \text{où} \quad \bar{\gamma} \in \partial f(\bar{y})$$

et donc (voir paragraphe 3.3)

$$\bar{y} = p_{M_{\phi_k}}(x_n).$$

- Montrons à présent que x_n minimise f.

Comme la suite (x_n) est finie, on ne fait plus de pas de descente après x_n.
Donc, si on note k_0 l'itération où x_n est mis à jour, alors pour tout $k > k_0$ on fait un pas nul. Dès lors

$$\forall k > k_0 \quad f(x_n) - f(y_k) < m\left[f(x_n) - \varphi_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n >\right]. \quad (4.17)$$

Par ailleurs $y_k \to P_{M_{\phi_k}}(x_n)$, $\varphi_k(y_k) - f(y_k) \to 0$ et f est une fonction continue.
Par conséquent, en passant à la limite dans l'inégalité (4.17) on a

$$f(x_n) - f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) \le m\left[\begin{array}{l} f(x_n) - f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) \\ \qquad -\frac{1}{2} < M_n\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n\right), p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n > \end{array}\right],$$

ou encore

$$(1-m)\left(f(x_n) - f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right)\right) \le -\frac{m}{2} < M_n\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n\right), p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n >.$$

De plus, puisque M_n est définie positive

$$-\frac{m}{2} < M_n\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n\right), p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n > \le 0.$$

Par conséquent, comme $(1-m) > 0$

$$f(x_n) - f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) \le 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x_n) \le f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right). \quad (4.18)$$

D'autre part, par définition de $\tilde{\tilde{f}}$ (voir chapitre 3)

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}(x_n) &= f(x_n) + \frac{1}{2} < M_n(x_n - x_n), x_n - x_n > \\ &= f(x_n). \end{aligned} \quad (4.19)$$

De plus, par la définie positivité de la matrice M_n
$< M_n\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n\right), p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n > \ge 0$ et donc par définition de $\tilde{\tilde{f}}$

$$\begin{aligned} f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) &\le f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) + \frac{1}{2} < M_n\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n\right), p_{M_{\phi_k}}(x_n) - x_n > \\ &= \tilde{\tilde{f}}\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dès lors, par les relations (4.18), (4.19) et (4.20), on en déduit

$$\tilde{\tilde{f}}(x_n) = f(x_n) \le f\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right) \le \tilde{\tilde{f}}\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right).$$

Par conséquent

$$\tilde{\tilde{f}}(x_n) \le \tilde{\tilde{f}}\left(p_{M_{\phi_k}}(x_n)\right).$$

Mais comme par définition $p_{M_{\phi_k}}(x_n) = \underset{R^n}{\text{argmin}}\ \tilde{\tilde{f}}(y)$, on a nécessairement que $x_n = p_{M_{\phi_k}}(x_n)$.

Or par ailleurs, on a vu dans le paragraphe 3.3 que $x_{n+1} = p_{M_{\phi_k}}(x_n)$ si et seulement si $M_n(x_n - x_{n+1}) \in \partial f(x_n + 1)$.

Par conséquent comme $x_n = p_{M_{\phi_k}}(x_n)$ on a $0 \in \partial f(x_n)$ et donc, par les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'une fonction convexe (voir proposition V.1 en annexe) x_n minimise f.

□

4.1.3.2 Suite infinie

Dans cette section, nous étudierons la convergence de l'algorithme 4.1 lorsque celui-ci génère une suite infinie.
De plus, comme dans le chapitre 3, nous séparerons l'analyse de convergence de cet algorithme en considérant d'abord que les matrices M_n sont des matrices quelconques , et ensuite que les matrices M_n sont proportionnelles à une matrice M symétrique, définie positive.

A. Convergence de l'algorithme avec métrique quelconque

Avant de pouvoir étudier la convergence de l'algorithme 4.1, deux lemmes sont indispensables.

Le premier lemme (lemme 4.2) établit un lien entre l'algorithme 4.1 et la méthode du ε-sous-différentiel (voir chapitre 1).
Notons que dans le chapitre 2, nous avons déjà établi lors de la proposition 2.3 un lien entre la méthode du ε-sous-différentiel et la méthode proximale. Dès lors, comme l'algorithme 4.1 est une généralisation de l'algorithme proximal, le lemme qui suit est également une généralisation de la proposition 2.3.

Lemme 4.2

Soit (x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme faisceau à métrique variable.
Alors $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$
où $\varepsilon_n = f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2$,
$k(n)$ étant l'itération où x_n est mis à jour.

Preuve :

Par construction, $\gamma_k \in \partial\phi_k(y_k)$ pour tout k.
Par conséquent, si on note $k(n)$ l'itération où x_n est mis à jour, et $\gamma_n = \gamma_{k(n)}$ on a

$$\gamma_n \in \partial\varphi_{k(n)}(x_{n+1}).$$

Dès lors, en utilisant la définition du sous-différentiel de $\phi_{k(n)}$ en x_{n+1}, il résulte que

$$\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_{n+1} >.$$

En décomposant le terme $y - x_{n+1}$ en fonction de $y - x_n$ et de $x_n - x_{n+1}$

$$\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_n > + < \gamma_n, x_n - x_{n+1} >.$$

D'où, comme $x_n - x_{n+1} = M_n^{-1}\gamma_n$ on a

$$\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_n > + < \gamma_n, M_n^{-1}\gamma_n >. \tag{4.21}$$

De plus, par les propriétés du quotient de Rayleigh (voir proposition VI.5 en annexe), on a

$$< \gamma_n, M_n^{-1}\gamma_n > \geq \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2.$$

Par conséquent, il découle de la relation (4.21) que

$$\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_n > + \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2.$$

Dès lors, en ajoutant et en retranchant le terme $f(x_n)$ au membre de droite de l'inégalité, on obtient

$$\begin{aligned}\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) &\geq f(x_n) + \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) - f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > + \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 \\ &= f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - \varepsilon_n\end{aligned}$$

où $\varepsilon_n = f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2$. (4.22)

Par ailleurs, on a par la relation (4.3) que $f \geq \varphi_k$. Dès lors, il découle de la relation (4.22) que

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - \varepsilon_n.$$

Par conséquent, si on arrive à montrer que $\varepsilon_n \geq 0$ on aura $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$.

Or si on remplace y par x_n dans la dernière inégalité, on trouve

$$f(x_n) \geq f(x_n) + < \gamma_n, x_n - x_n > - \varepsilon_n$$

ou encore

$$\varepsilon_n \geq 0.$$

□

Le second lemme dont nous avons besoin pour étudier la convergence de l'algorithme 4.1 est fort semblable à un résultat que nous avons déjà obtenu au chapitre 3 dans le cadre de la méthode proximale à métrique variable (cfr. lemme 3.2).

On basera donc notre démonstration sur celle de ce lemme.

Lemme 4.3

Soit (x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme faisceau à métrique variable.

i) Si $(f(x_n))$ est bornée inférieurement

alors $\varepsilon_n \to 0$,

$\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0$.

ii) Si de plus $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = +\infty$

alors 0 est un point d'accumulation de(γ_n).

Preuve :

i) Montrons d'abord que $\varepsilon_n \to 0$ *et* $\lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0$.

- Comme d'une part, par hypothèse la suite (x_n) est infinie, le test de descente $f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m\delta_n^k$ est satisfait.

  De plus, comme on a pour tout k et pour tout n $\delta_n^k \geq 0$, $(f(x_n))$ est une suite décroissante et comme, par hypothèse, $(f(x_n))$ est une suite bornée inférieurement elle converge vers sa borne inférieure f^*.
- D'autre part, par construction, $\gamma_n \in \partial\varphi_{k(n)}(x_{n+1})$ où, rappelons le, $k(n)$ est l'itération à laquelle x_n est mis à jour.

  On obtient dès lors, par définition du sous-différentiel de $\phi_{k(n)}$ en x_{n+1}

$$\forall y \quad \varphi_{k(n)}(y) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, y - x_{n+1} >.$$

On a donc en prenant en particulier $y = x_n$

$$\varphi_{k(n)}(x_n) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < \gamma_n, x_n - x_{n+1} >.$$

Dès lors, en remplaçant γ_n par $M_n(x_n - x_{n+1})$, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_{k(n)}(x_n) &\geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + < M_n(x_n - x_{n+1}), x_n - x_{n+1} > \\ &= \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + \|x_n - x_{n+1}\|_{M_n}^2 .\end{aligned} \tag{4.23}$$

De plus, par la relation (4.3), $f \geq \varphi_k$. Il résulte donc de la relation (4.23) que

$$f(x_n) \geq \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) + \|x_{n+1} - x_n\|_{M_n}^2$$

ou encore

$$\|x_{n+1} - x_n\|_{M_n}^2 \leq f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}). \tag{4.24}$$

- Pour terminer, remarquons que comme le test de descente $f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m\delta_n^k$ est vérifié, on a

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m\left[f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) - \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|_{M_n}^2\right]$$

et donc

$$m\left[f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1})\right] \leq f(x_n) - f(x_{n+1}) + \frac{m}{2}\|x_{n+1} - x_n\|_{M_n}^2. \tag{4.25}$$

Dès lors, comme par l'inégalité (4.24) $\|x_{n+1} - x_n\|_{M_n}^2 \leq f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1})$, il découle de l'inégalité (4.25) que

$$m\left[f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1})\right] \leq f(x_n) - f(x_{n+1}) + \frac{m}{2}\left[f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1})\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{m}{2}\left[f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1})\right] \leq f(x_n) - f(x_{n+1})$$

ou encore puisque $m > 0$,

$$f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) \leq \frac{2\left(f(x_n) - f(x_{n+1})\right)}{m}.$$

D'où en sommant pour n allant de 1 à l'infini, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) \leq \frac{2\left(f(x_1) - f^*\right)}{m} < \infty.$$

Comme par ailleurs $\varepsilon_n = f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) - \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2$ (cfr. lemme 4.2),

$$\varepsilon_n + \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 = f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}).$$

Dès lors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 < \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) - \varphi_{k(n)}(x_{n+1}) < \infty.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 < \infty. \tag{4.26}$$

Comme le terme général d'une série convergente tend vers zéro, on conclut

$$\varepsilon_n \to 0 \text{ et } \lambda_{\min}(M_n^{-1})\|\gamma_n\|^2 \to 0.$$

ii) Montrons ensuite que 0 est un point d'accumulation de la suite (γ_n).

Supposons par l'absurde que 0 ne soit pas un point d'accumulation de la suite(γ_n).

Dans ce cas $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \|\gamma_n\| \geq \varepsilon$. Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}).$$

Dès lors, comme par hypothèse $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = +\infty$, on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 = \infty;$$

ce qui contredit la relation (4.26).

□

Les deux lemmes précédents nous permettent, à présent, d'établir la proposition de convergence suivante.

Proposition 4.2

> Soit (x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme faisceau à métrique variable.
> Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = \infty$ et si (x_n) est bornée,
> alors $f(x_n) \to \inf f(x)$ et toutes les valeurs d'adhérence de (x_n) sont des minima de f.

Remarquons, avant de commencer la preuve, que comme pour le lemme précédent, cette proposition est l'analogue d'un résultat que l'on a établi dans le cadre de la méthode proximale à métrique variable (cfr. proposition 3.4).
La preuve qui suit essaye donc d'imiter autant que possible le raisonnement de la démonstration de cette proposition.

Preuve :

- Montrons d'abord que $f(x_n) \to \inf f(x)$.
  Pour ce, reprenons le raisonnement que nous avons poursuivi dans la démonstration de la proposition 3.4.
  - Comme f est une fonction convexe, elle est minorée par une fonction affine (voir proposition I.9 en annexe). Dès lors

    $$\exists s \in R^n, b \in R \text{ tq } f(x_n) \geq \langle s, x_n \rangle - b.$$

    En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $f(x_n) \geq -\|s\| \; \|x_n\| - b$.
    Or comme par hypothèse (x_n) est bornée $\exists\, M \geq 0 \;\; tq \;\; \forall n \;\; \|x_n\| \leq M$.

Par conséquent

$$f(x_n) \geq -(\|s\|M + b).$$

$(f(x_n))$ est donc bornée inférieurement.
Comme de plus, on sait par la démonstration du lemme 4.3 que cette suite est décroissante, on en déduit qu'elle converge vers sa borne inférieure $f^* \in R$.

- D'autre part, on sait grâce au lemme 4.2 que $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$, on a donc par définition du ε_n- sous-différentiel de f en x_n

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \gamma_n, y - x_n > - \varepsilon_n. \tag{4.27}$$

Par ailleurs, en appliquant le lemme 4.3, on sait que

$$\exists\, N_1 \subseteq N \text{ tq } \gamma_n \to 0 \text{ et } \varepsilon_n \to 0 \text{ pour } n \in N_1. \tag{4.28}$$

Dès lors, en utilisant l'hypothèse que (x_n) est une suite bornée, on en déduit que

$$\exists\, N_1 \subseteq N \text{ tq } < \gamma_n, y - x_n > \to 0 \text{ et } \varepsilon_n \to 0 \text{ pour } n \in N_1.$$

Par conséquent, en passant à la limite dans N_1 dans la relation (4.27), il résulte que

$$\forall y \quad f(y) \geq f^*.$$

On en déduit donc par définition de la borne inférieure de f que $f^* \leq \inf f$.

Comme par ailleurs $f^* \geq \inf f$, il en résulte que

$$f^* = \inf f.$$

- Montrons ensuite que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de f.

Ici, on ne peut plus reprendre le raisonnement que l'on avait utilisé dans la démonstration de la proposition 3.4.
En effet, dans ce raisonnement, pour montrer que $\bar{x}$ est un minimum de f, on se sert du fait que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$, mais ici, rien ne nous dit que $\gamma_n \in \partial f(x_{n+1})$.
Tout ce que l'on sait, c'est que $\gamma_n \in \partial \phi_{k(n)}(x_{n+1})$!

- Par contre, on sait par hypothèse que (x_n) est bornée ; elle admet ainsi au moins une valeur d'adhérence. Il existe donc une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to \bar{x}$.
Dès lors, puisque f est une fonction semi-continue inférieurement

$$f(\bar{x}) \leq \underline{\lim}_{k \to \infty} f(x_{n_k}). \tag{4.29}$$

(voir proposition II.2 en annexe)
D'autre part, on a déjà montré que $f(x_n) \to \inf f(x)$, on a donc en particulier

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \inf f(x). \tag{4.30}$$

- Par conséquent, il résulte des relations (4.29) et (4.30) que

$$f(\overline{x}) \leq \inf f .$$

On en déduit donc que $\overline{x}$ est un minimum de f.

□

Dans la proposition qui précède, nous avons besoin du caractère borné de la suite (x_n) pour avoir la convergence. Cependant, lorsque les matrices M_n sont proportionnelles à une matrice donnée, nous montrerons à la section suivante que, comme c'était le cas dans le chapitre précédent, cette hypothèse n'est plus nécessaire.

B. Convergence de l'algorithme lorsque la métrique varie en restant proportionnelle à une matrice M symétrique définie positive.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que $M_n = \mu_n M$ où $\mu_n > 0$ et M est une matrice symétrique définie positive.

Tous les lemmes et toutes les propositions importantes que l'on a obtenus à la section précédente sont identiques aux résultats de la section 3.4.1 du chapitre précédent lorsque la suite est générée par l'algorithme proximal à métrique variable.

Il est donc assez normal de retrouver les mêmes résultats de convergence pour une suite générée par l'algorithme proximal à métrique variable ou pour une suite générée par l'algorithme faisceau à métrique variable lorsque la métrique est proportionnelle à une matrice M donnée et symétrique définie positive.

<u>Proposition 4.3</u>

Soit (x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme 4.1 avec $M_n = \mu_n M$ où M est symétrique définie positive et $\mu_n > 0$.

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$,

alors $f(x_n) \to \inf f(x)$.

Comme on peut le voir, on n'a donc plus besoin que la suite (x_n) soit bornée pour que $f(x_n) \to \inf f(x)$.

<u>Remarque</u> : la démonstration de la proposition 4.3 est identique à celle de la proposition 3.6 si ce n'est qu'au lieu d'utiliser les propriétés se rapportant aux suites générées par l'algorithme 3.1, on utilise celles qui se rapportent aux suites générées par l'algorithme 4.1.

Preuve :

Par la démonstration du lemme 4.3 $(f(x_n))$ est décroissante. Elle converge donc, soit vers sa borne inférieure si elle est bornée inférieurement, soit vers $-\infty$.

- Supposons d'abord que la suite $(f(x_n))$ tende vers $-\infty$.
  Dans ce cas, $(f(x_n)) \to \inf f$.
- Supposons ensuite que $(f(x_n))$ soit bornée inférieurement et montrons que toutes les hypothèses de la proposition 3.5 sont satisfaites ; nous pourrions alors en effet en déduire immédiatement la thèse.
  Par hypothèse $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$. De ce fait, la première hypothèse de la proposition 3.5 est vérifiée.
  De plus, en appliquant le lemme 4.3

$$\|\gamma_n\|^2 \lambda_{\min}(M_n^{-1}) \to 0 \quad et \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Dès lors en utilisant le fait que $M_n = \mu_n M$, on obtient

$$\varepsilon_n \to 0 \quad et \quad \frac{1}{\mu_n} \lambda_{\min}(M^{-1}) \|\gamma_n\|^2 \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_n \to 0 \quad et \quad \frac{1}{\mu_n} \|\gamma_n\|^2 \to 0.$$

Les hypothèses (3.21), (3.22) et (3.23) de la proposition 3.5 sont donc vérifiées.

□

La seconde proposition assure la convergence de la suite (x_n) vers un minimum de f et est l'analogue de la proposition 3.7 du chapitre précédent.

Proposition 4.4

Soit (x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme 4.1 avec $M_n = \mu_n M$ où M est symétrique définie positive et $\mu_n > 0$.
Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty,$$

$$\inf\{\mu_i\} = \overline{\mu} > 0,$$

f possède un minimum.

Alors $x_n \to \overline{x}$ min de f.

Notons qu'ici aussi, le caractère borné de la suite (x_n) pour avoir la convergence n'est plus nécessaire.

Remarque : Ici, la preuve de la proposition 4.4 est identique à celle de la proposition 3.7, si ce n'est qu'ici encore, au lieu d'utiliser les propriétés se rapportant aux suites générées par l'algorithme 3.1, on utilise celles qui se rapportent aux suites générées par l'algorithme 4.1

Preuve :

- Montrons d'abord que la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence.
  Soit $\overline{x}$ un minimum de f. En appliquant le lemme 3.3 avec $y = \overline{x}$, on obtient

$$\exists c > 0 \text{ tq } \left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\left[f(\overline{x}) - f(x_n) + \varepsilon_n\right].$$

Dès lors, puisque $\overline{x}$ est un minimum de f et que par conséquent $f(\overline{x}) - f(x_n) \leq 0$, on en déduit

$$\left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 \leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n. \tag{4.31}$$

En utilisant cette inégalité plusieurs fois de suite consécutivement, il résulte que

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1} - \overline{x}\right\|_M^2 &\leq \left\|x_n - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \\
&\leq \left\|x_{n-1} - \overline{x}\right\|_M^2 + \frac{c}{\mu_{n-1}^2}\left\|\gamma_{n-1}\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_{n-1}}{\mu_{n-1}} + \frac{c}{\mu_n^2}\left\|\gamma_n\right\|^2 + 2\frac{\varepsilon_n}{\mu_n} \\
&\;\vdots \\
&\leq \left\|x_1 - \overline{x}\right\|_M^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c}{\mu_i^2}\left\|\gamma_i\right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

De plus, en appliquant la relation (4.26) avec $M_n = \mu_n M$ on a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|\gamma_i\|^2}{\mu_i} < \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$. Dès lors, en utilisant le fait que la suite $\left(\frac{1}{\mu_i}\right)$ est bornée par $\frac{1}{\mu}$ on en déduit que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|\gamma_i\|^2}{\mu_i^2} < \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} < \infty$ (4.33).

Par conséquent, il résulte des relations (4.32) et (4.33) que (x_n) est une suite bornée. Elle possède donc une valeur d'adhérence.

- Par ailleurs, on a par hypothèse que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$. Il résulte donc de la proposition 4.2 que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de *f*.
- Montrons finalement que toute la suite (x_n) tend vers un minimum $\bar{x}$ de *f*.

Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Par la remarque précédente, $\bar{x}$ est un minimum de *f*.
Dès lors, la relation (4.31) est vérifiée et donc

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|_M^2 \leq \|x_n - \bar{x}\|_M^2 + \frac{c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n.$$

Posons ensuite $\delta_n = \frac{c}{\mu_n^2}\|\gamma_n\|^2 + \frac{2}{\mu_n}\varepsilon_n$, (4.34)

on a ainsi

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\|_M^2 \leq \|x_n - \bar{x}\|_M^2 + \delta_n.$$

D'autre part par la relation (4.34), il résulte que (δ_n) est une suite à termes positifs et de plus, il résulte de la relation (4.33) que δ_n est le terme général d'une série convergente.

Par conséquent, il suffit d'appliquer le lemme 3.4 pour prouver la thèse.

□

4.2 2ème PARTIE : ETUDE DE LA METHODE FAISCEAU DES PLANS SECANTS

Dans la suite de ce paragraphe, nous étudierons l'algorithme précédent muni d'un choix particulier de faisceau.

Dans la section 4.2.1 nous munirons l'algorithme précédent du faisceau des plans sécants.

Ensuite, dans la section 4.2.2 nous considérerons différentes mises à jour des matrices M_n. Ces mises à jour nous conduiront à devoir améliorer l'algorithme introduit à la section 4.2.1.

Finalement, la section 4.2.3 sera consacrée à une analyse plus approfondie de quelques propriétés des itérés engendrés par l'algorithme amélioré introduit à la section 4.2.2.

C'est sur ces propriétés que nous nous baserons à la section 4.2.4 pour essayer d'étudier la convergence de ce nouvel algorithme.

4.2.1 Description de l'algorithme faisceau à métrique variable des plans sécants

Munissons à présent l'algorithme précédent d'un choix particulier des fonctions ϕ_k en prenant pour φ_k la fonction $\breve{f}_k$ définie par

$$\breve{\mathbf{f}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{i=1\cdots k}} \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\mathbf{i}}) + < \mathbf{g}_{\mathbf{i}}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathbf{i}} >.$$

En procédant de la sorte, on considère ainsi un choix particulier de faisceau.

Ce faisceau porte un nom : ***le faisceau des plans sécants.***

Grâce à ce choix, on peut réécrire l'algorithme 4.1 comme suit.

Algorithme 4.2

Choisir $m \in]0,1[$, $x_1 \in R^n$.
Poser $y_1 = x_1$; $M_1 = I$; $n = k = 1$.

PAS 1 (calcul d'un candidat)

Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait

- calculer $y_k = \arg\min \breve{f}_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$,
- calculer $\gamma_k = M_n(x_n - y_k) \in \partial\breve{f}_k(y_k)$,
- calculer $\delta_n^k = f(x_n) - \breve{f}_k(y_k) - \frac{1}{2} < M_n(y_k - x_n), y_k - x_n >$.

PAS 2 (pas de descente)

- Si $f(x_n) - f(y_k) \geq m\delta_n^k$ alors poser $x_{n+1} = y_k$,
  mettre à jour M_n,
  augmenter n de 1.

PAS 3 (pas nul)

Augmenter k de 1 et retourner au pas 1.

Remarques

(1) Pour pouvoir réutiliser les résultats de la première partie du §4 il faut être sûr que toutes les hypothèses sur φ_k sont satisfaites par $\breve{f}_k$.
Il faut donc vérifier que $\breve{f}_k$ est convexe, à valeur dans R et qu'elle satisfait les relations (4.3) à (4.5).

- Vérifions d'abord que $\breve{f}_k$ est à valeur dans R et convexe.

  - D'une part, pour tout $y \in R^n$ on a par définition
  $$\breve{f}_k(y) = \max_{i=1\cdots k} f(y_i) + < g_i, y - y_i >.$$
  Par conséquent, $\exists\, j \in \{1 \cdots k\} \quad tq \quad \breve{f}_k(y) = f(y_j) + < g_j, y - y_j >$.
  Dès lors, comme f est une fonction à valeur dans R ,on a
  $$\breve{f}_k(y) < \infty \qquad \forall y.$$

  - D'autre part, comme $\breve{f}_k$ est un maximum de fonctions convexes, le fait que $\breve{f}_k$ soit à valeur dans R implique que $\breve{f}_k$ soit convexe (voir proposition I.11 en annexe).

- Vérifions ensuite que les relations (4.3), (4.5) et (4.4) sont bien satisfaites.

  - $\breve{f}_k \le f$.
  En effet, par construction $g_i \in \partial f(y_i)$. Dès lors, il résulte de la définition du sous-différentiel de f en y_i que
  $$\forall y \quad f(y) \ge f(y_i) + < g_i, y - y_i >.$$
  Par conséquent, en prenant le maximum de telles fonctions lorsque i varie entre 1 et k, on obtient
  $$\forall y \quad f(y) \ge \max_{i=1\cdots k} f(y_i) + < g_i, y - y_i >$$
  et donc, par définition de $\breve{f}_k$ on a $\forall y \quad f(y) \ge \breve{f}_k(y)$.
  La relation (4.3), à savoir $\breve{f}_k \le f$ est donc satisfaite.

  - $f(y_k) + < g_k, y - y_k > \le \breve{f}_{k+1}(y) \quad \forall y$.
  En effet, par définition du maximum, on a
  $$\forall y \quad f(y_k) + < g_k, y - y_k > \le \max_{i=1\cdots k+1} f(y_i) + < g_i, y - y_i >.$$
  Par conséquent, par définition de $\breve{f}_{k+1}$
  $$\forall y \quad f(y_k) + < g_k, y - y_k > \le \breve{f}_{k+1}(y),$$
  ce qui démontre la relation (4.5).

- $\forall y \quad l_k(y) \leq \breve{f}_{k+1}(y)$.

  En effet, on a vu dans le paragraphe 4.1.1 que $l_k(y) \leq \phi_k(y) \quad \forall y, \forall k$ (voir relation (4.1)).

  Dès lors en remplaçant ϕ_k par sa valeur, c'est-à-dire par $\breve{f}_k$, on obtient

  $$l_k(y) \leq \breve{f}_k(y) \quad \forall y, \forall k.$$

  Par ailleurs, par définition de $\breve{f}_k$ et $\breve{f}_{k+1}$, on a

  $$\forall y \quad \breve{f}_k(y) \leq \breve{f}_{k+1}(y).$$

  Dès lors,

  $$\forall y \quad l_k(y) \leq \breve{f}_{k+1}(y).$$

  Cette inégalité n'est rien d'autre que la relation (4.4).

(2) Avant de commencer l'étude théorique de l'algorithme, mentionnons quelques remarques d'implémentation :

1) La description ci-dessus néglige des aspects numériques tels que :
   - un test d'arrêt explicite,
   - un choix élaboré de la matrice initiale,
   - un mécanisme élaboré évitant de stocker tout le faisceau lorsque k devient grand.
2) La mise à jour de M_n est expliquée dans le point 4.2.2.
3) L'algorithme ci-dessus est schématique en ce sens que pour avoir un algorithme efficace, il va falloir chercher le nouvel itéré le long d'une courbe.

4.2.2 Mise à jour des matrices

Dans le cas où *f* est différentiable, une manière classique de mettre à jour M_n est de choisir une matrice M_{n+1} symétrique définie positive vérifiant l'équation sécante :

$$M_{n+1}u = v \text{ où } u = x_{n+1} - x_n,$$
$$v = \nabla f(x_{n+1}) - \nabla f(x_n).$$

Ici ce n'est plus possible d'agir de la même manière car *f* n'est pas nécessairement différentiable.
Avant de pouvoir décrire les mises à jour de matrices dans le cas non différentiable, certains résultats de base sur la régularisée de Moreau - Yosida sont indispensables.

4.2.2.1 Régularisée de Moreau-Yosida

Soit M une matrice symétrique définie positive,

$h: R^n \to R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement.

On définit la régularisée de Moreau-Yosida par la fonction

$$H: R^n \to R \cup \{+\infty\}$$
$$x \to H(x) = \inf_y h(y) + \frac{1}{2} < M(y-x), y-x >. \qquad (4.35)$$

Lemme 4.4

$\boxed{H \text{ est convexe, finie et continue}}$

Preuve :

- Montrons d'abord que H est une fonction à valeur dans R.

  Comme M est une matrice symétrique définie positive et h une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement, on obtient en appliquant les propositions 3.1 et 3.2 que la borne inférieure pour la variable y de la fonction $h(y)+\frac{1}{2}< M(y-x), y-x >$ est atteinte en un point unique $p_h^M(x)$ (voir proposition V.2 et V.4 en annexe). Par conséquent

$$\forall x \quad H(x) = \inf_y h(y)+\frac{1}{2}< M(y-x), y-x >$$
$$= h\left(p_h^M(x)\right)+\frac{1}{2}< M\left(p_h^M(x)-x\right), p_h^M(x)-x > \quad \in R. \tag{4.36}$$

  H est donc une fonction à valeur dans R.

- Montrons ensuite que H est une fonction convexe et continue.

  Soient $x_1, x_2 \in R^n$ deux points quelconques.
  Par la relation (4.36),on a

$$H(x_1) = h\left(p_h^M(x_1)\right)+\frac{1}{2}< M\left(p_h^M(x_1)-x_1\right), p_h^M(x_1)-x_1 >$$

et
$$H(x_2) = h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-x_2 >.$$

  Par conséquent,

$$\lambda H(x_1)+(1-\lambda)H(x_2) = \lambda\left[h\left(p_h^M(x_1)\right)+\frac{1}{2}< M\left(p_h^M(x_1)-x_1\right), p_h^M(x_1)-x_1 >\right]$$
$$+(1-\lambda)\left[h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-x_2 >\right].$$

  De plus, comme h et $\| \quad \|_M^2$ sont deux fonctions convexes, on en déduit que

$$\lambda H(x_1)+(1-\lambda)H(x_2) \geq h\left(\lambda p_h^M(x_1)+(1-\lambda)p_h^M(x_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\|\lambda\left(p_h^M(x_1)-x_1\right)+(1-\lambda)\left(p_h^M(x_2)-x_2\right)\right\|_M^2$$
$$= h\left(\lambda p_h^M(x_1)+(1-\lambda)p_h^M(x_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\|\lambda p_h^M(x_1)+(1-\lambda)p_h^M(x_2)-\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right\|_M^2.$$

  Dès lors, par définition de la borne inférieure d'une fonction, on obtient

$$\lambda H(x_1)+(1-\lambda)H(x_2) \geq \inf_y h(y)+\frac{1}{2}\left\|y-\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\right\|_M^2$$
$$= H\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right).$$

H est donc une fonction convexe.
Comme d'autre part, on sait que H est à valeur dans R (voir relation (4.36)), on en déduit automatiquement que H est une fonction continue (voir proposition I.16 en annexe).

□

Lemme 4.5

H est différentiable et $\nabla H(x) = M\left(x - p_h^M(x)\right)$.

Preuve :

Pour montrer que H est différentiable et que pour tout x, $\nabla H(x) = M\left(x - p_h^M(x)\right)$.
Il suffit de montrer que pour tout x $\partial H(x) = \left\{M\left(x - p_h^M(x)\right)\right\}$ (voir proposition IV.8 en annexe).
De plus, comme la dérivée directionnelle $H'(x;d)$ est l'image de la fonction support du sous-différentiel de H en x dans la direction d pour tout d, on a
$H'(x;d) = \sup\limits_{s \in \partial H(x)} s^{\mathrm{T}} d$ (voir proposition IV.7 en annexe).

Dès lors, si on arrive à montrer que $\forall d \in R^n$ $H'(x;d) = \left(M\left(x - p_h^M(x)\right)\right)^{\mathrm{T}} d$, on aura nécessairement que $\partial H(x) = \left\{M\left(x - p_h^M(x)\right)\right\}$, on aura ainsi démontré la thèse.

Vérifions donc que $\forall d \in R^n$ $H'(x;d) = \left(M\left(x - p_h^M(x)\right)\right)^{\mathrm{T}} d$.

- Par définition de H, on a

$$\forall \alpha > 0, \forall d \in R^n \quad H(x + \alpha d) = \inf_y h(y) + \frac{1}{2} < M\left(y - (x + \alpha d)\right), y - (x + \alpha d) >.$$

  Dès lors, par définition de la borne inférieure d'une fonction, on obtient

$$\begin{aligned}\forall \alpha > 0, \forall d \in R^n \quad H(x + \alpha d) &\le h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2} < M\left(p_h^M(x) - (x + \alpha d)\right), p_h^M(x) - (x + \alpha d) > \\ &= h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2}\left\|p_h^M(x) - (x + \alpha d)\right\|_M^2.\end{aligned}$$

  Par conséquent, si on décompose le terme $\left\|p_h^M(x) - (x + \alpha d)\right\|_M^2$ en fonction des termes $\left\|p_h^M(x) - x\right\|_M^2$ et $\|d\|_M^2$, il résulte que

$$h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2}\left\|p_h^M(x) - x\right\|_M^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|d\|_M^2 + \alpha < M\left(x - p_h^M(x)\right), d > \ge H(x + \alpha d).$$
(4.37)

- D'autre part, par définition du sous-différentiel de H en x, on a

$$\forall \quad x' \in \partial H(x) \quad H(x + \alpha d) \ge H(x) + \alpha < d, x' >$$

et donc, par définition de la borne supérieure d'une fonction, on obtient

$$\forall x : H(x+\alpha d) \geq H(x) + \alpha \sup_{x' \in \partial H(x)} < d, x' >,$$

ou encore (voir proposition IV.7 en annexe),

$$H(x+\alpha d) \geq H(x) + \alpha H'(x\,; d).$$

- Dès lors, la relation (4.37) peut se réécrire comme suit

$$h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2}\left\|p_h^M(x) - x\right\|_M^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|d\|_M^2 + \alpha < M\left(x - p_h^M(x)\right), d > \geq H(x) + \alpha H'(x\,; d).$$

D'où par la relation (4.36),

$$h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2}\left\|p_h^M(x) - x\right\|_M^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|d\|_M^2 + \alpha < M\left(x - p_h^M(x)\right), d >$$
$$\geq h\left(p_h^M(x)\right) + \frac{1}{2}\left\|p_h^M(x) - x\right\|_M^2 + \alpha H'(x\,; d)$$

c'est à dire,

$$\frac{1}{2}\alpha^2\|d\|_M^2 + \alpha < M\left(x - p_h^M(x)\right), d > \; \geq \alpha H'(x\,; d).$$

En divisant par α, on obtient finalement (puisque $\alpha > 0$)

$$\frac{1}{2}\alpha\|d\|_M^2 + \left[M\left(x - p_h^M(x)\right)\right]^{\mathrm{T}} d \geq H'(x\,; d).$$

Dès lors, en faisant tendre $\alpha \to 0$

$$H'(x\,; d) \leq \left(M\left(x - p_h^M(x)\right)\right)^{\mathrm{T}} d.$$

En remplaçant d par $-d$, on a (voir proposition III.2 en annexe)

$$-H'(x\,; d) = H'(x\,; -d) \leq -\left[M\left(x - p_h^M(x)\right)^{\mathrm{T}}\right] d.$$

Par conséquent

$$H'(x\,; d) = \left[M\left(x - p_h^M(x)\right)\right]^{\mathrm{T}} d.$$

□

Le lemme suivant caractérise les minima de la fonction H par rapport à ceux de la fonction h.

Lemme 4.6

$$\boxed{\{x|x \text{ minimum de } h\} = \{x|x \text{ minimum de } H\}.}$$

Preuve :

- Remarquons d'abord que pour tout x $H(x) \leq h(x)$.

  Par définition de la fonction H

$$\forall x \quad H(x) = \inf_y h(y) + \frac{1}{2} < M(y-x), y-x >.$$

  Dès lors, par définition de la borne inférieure d'une fonction,

$$\forall x \quad H(x) \leq h(x) + \frac{1}{2} < M(x-x), x-x >$$
$$= h(x).$$

  Par conséquent, on a

$$\forall x \quad H(x) \leq h(x). \tag{4.38}$$

- Montrons ensuite que si x^* minimise h sur R^n, alors x^* minimise H sur R^n.

  En appliquant la relation (4.38) avec $x = x^*$, on a $H(x^*) \leq h(x^*)$.

  De plus, par hypothèse x^* minimise h sur R^n, par conséquent

$$\forall x \quad H(x^*) \leq h(x^*) \leq h(p_h^M(x)). \tag{4.39}$$

  Par ailleurs, comme M est définie positive, $\frac{1}{2} < M(p_h^M(x) - x), p_h^M(x) - x > \geq 0 \quad \forall x$, dès lors

$$\forall x \quad h(p_h^M(x)) \leq h(p_h^M(x)) + \frac{1}{2} < M(p_h^M(x) - x), -x >.$$

  On déduit donc de la relation (4.39) que

$$\forall x \quad H(x^*) \leq h(p_h^M(x)) + \frac{1}{2} < M(p_h^M(x) - x), p_h^M(x) - x >.$$

  D'où, par l'égalité (4.36)

$$\forall x \quad H(x^*) \leq H(x).$$

- Montrons finalement que si x^* minimise H sur R^n, alors x^* minimise h sur R^n.

  Comme H est une fonction propre et convexe (voir lemme 4.4), on a par les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'une fonction convexe (voir proposition V.1 en annexe) que x^* minimise H sur R^n si et seulement si $0 \in \partial H(x^*)$ ou encore par le lemme 4.5

  si et seulement si $M(x^* - p_h^M(x^*)) = 0$.

  De plus, comme M est injective $M(x^* - p_h^M(x^*))$ ne peut être nul que lorsque $x^* = p_h^M(x^*)$.

  Par ailleurs, il résulte de la relation (4.36) que

$$H(x^*) = h(p_h^M(x^*)) + \frac{1}{2} < M(p_h^M(x^*) - x^*), p_h^M(x^*) - x^* >$$

  et donc puisque $x^* = p_h^M(x^*)$, on a

$$H(x^*) = h(p_h^M(x^*)) = h(x^*).$$

  Dès lors, en utilisant une fois de plus le fait que x^* minimise H sur R^n et la relation (4.38), on obtient que

$$\forall x \in R^n \quad h(x^*) = H(x^*) \leq H(x) \leq h(x).$$

$\square$

Voici encore un dernier résultat sur la régularisée de Moreau-Yosida.

Lemme 4.7

$\forall x_1, x_2 \quad 0 \leq \left\| \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1) \right\|^2 \leq \Lambda < \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), x_2 - x_1 >$
où Λ est la plus grande valeur propre de M.

Preuve

- Soit $x_1, x_2, \in R^n$. Montrons d'abord que

$$\forall y \in R^n : < M(p_h^M(x_2) - x_2), p_h^M(x_2) - y > -h(p_h^M(x_2)) - h(y) \leq 0.$$

  Par définition de $p_h^M(x_2)$ et de $H(x_2)$ on a

$$h(p_h^M(x_2)) + \frac{1}{2}\left\| p_h^M(x_2) - x_2 \right\|_M^2 = H(x_2) = \inf_S h(s) + \frac{1}{2}\left\| s - x_2 \right\|_M^2.$$

  Dès lors pour tout $y \in R^n$ et $\forall \theta$ tq $0 < \theta < 1$, on obtient par définition de la borne inférieure d'une fonction

$$h(p_h^M(x_2)) + \frac{1}{2}\left\| p_h^M(x_2) - x_2 \right\|_M^2 \leq h(\theta y + (1-\theta) p_h^M(x_2)) + \frac{1}{2}\left\| \theta y + (1-\theta) p_h^M(x_2) - x_2 \right\|_M^2.$$

  D'où comme $y + (1-\theta) p_h^M(x_2) = p_h^M(x_2) + \theta(y - p_h^M(x_2))$, on obtient

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2\right\|_M^2 \le h\left(\theta y+(1-\theta)p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2+\theta\left(y-p_h^M(x_2)\right)\right\|_M^2$$

et par la convexité de h, on en déduit donc que

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2\right\|_M^2 \le \theta h(y)+(1-\theta)h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2\right\|_M^2$$
$$+\frac{\theta^2}{2}\left\|y-p_h^M(x_2)\right\|_M^2+\theta < M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), y-p_h^M(x_2) >.$$

Comme de plus $0<\theta<1$, on a

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2\right\|_M^2 \le h(y)+h\left(p_h^M(x_2)\right)-\theta h\left(p_h^M(x_2)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\|p_h^M(x_2)-x_2\right\|_M^2+\frac{\theta}{2}\left\|y-p_h^M(x_2)\right\|_M^2$$
$$+< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), y-p_h^M(x_2) >,$$

ou encore

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)-h(y)+< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-y > -\frac{\theta}{2}\left\|y-p_h^M(x_2)\right\|_M^2 \le 0.$$

D'où en utilisant une fois de plus le fait que $0<\theta<1$

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)-h(y)+< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-y > -\frac{\theta}{2}\left\|y-p_h^M(x_2)\right\|_M^2 \le 0.$$

Lorsque $\theta \to 0$, on obtient

$$h\left(p_h^M(x_2)\right)-h(y)+< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-y > \le 0. \tag{4.40}$$

- Montrons ensuite que $\left\|\nabla H(x_2)-\nabla H(x_1)\right\|^2 \le \Lambda < \nabla H(x_2)-\nabla H(x_1), x_2-x_1 >$ où Λ est la plus grande valeur propre de M.

  En utilisant l'inégalité (4.40) avec $y=p_h^M(x_1)$ on a

$$< M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right), p_h^M(x_2)-p_h^M(x_1) > -h\left(p_h^M(x_1)\right)+h\left(p_h^M(x_2)\right) \le 0.$$

  Dès lors en échangeant les rôles de x_1 et de x_2, on obtient

$$< M\left(p_h^M(x_1)-x_1\right), p_h^M(x_1)-p_h^M(x_2) > -h\left(p_h^M(x_2)\right)+h\left(p_h^M(x_1)\right) \le 0.$$

  D'où en additionnant les deux inégalités précédentes, on en déduit

$$< p_h^M(x_2)-p_h^M(x_1), M\left(p_h^M(x_2)-x_2\right)-M\left(p_h^M(x_1)-x_1\right) > \le 0$$

  ou encore

$$< M\left(x_2-p_h^M(x_2)\right)-M\left(x_1-p_h^M(x_1)\right), p_h^M(x_2)-p_h^M(x_1) > \ge 0.$$

  ou encore grâce au lemme 4.5

$$< \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), p_h^M(x_2) - p_h^M(x_1) > \geq 0.$$

Or comme $p_h^M(x_2) - p_h^M(x_1) = p_h^M(x_2) - p_h^M(x_1) + x_2 - x_1 - x_2 + x_1$

$$= \left(p_h^M(x_2) - x_2\right) - \left(p_h^M(x_1) - x_1\right) + x_2 - x_1$$

$$= -M^{-1}\nabla H(x_2) + M^{-1}\nabla H(x_1) + x_2 - x_1,$$

où la dernière égalité provient du lemme 4.5, on en déduit que

$$- < \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), M^{-1}\left(\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right) - (x_2 - x_1) > \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$-\left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|_{M^{-1}}^2 \geq - < \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), x_2 - x_1 >.$$

Par ailleurs, en utilisant les propriétés du quotient de Rayleigh (voir proposition VI.5 en annexe), on a

$$\left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|_{M^{-1}}^2 \geq \Delta \left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|^2$$

où Δ est la plus petite valeur propre de M^{-1}.
Dès lors

$$\left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|_{M^{-1}}^2 \geq \frac{1}{\Lambda} \left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|^2$$

où Λ est la plus grande valeur propre de M.

Par conséquent,

$$< \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), x_2 - x_1 > \geq \left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|_{M^{-1}}^2 \geq \frac{1}{\Lambda} \left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|^2$$

et donc

$$0 \leq \left\|\nabla H(x_2) - \nabla H(x_1)\right\|^2 \leq \Lambda < \nabla H(x_2) - \nabla H(x_1), x_2 - x_1 >$$

où Λ est la plus grande valeur propre de M.

□

4.2.2.2 Choix de M_{n+1}

On peut maintenant réécrire de manière plus précise la mise à jour de la matrice M_n.

Pour cela on choisit deux vecteurs z, z' ainsi qu'une fonction h allant de R^n dans $R \cup \{+\infty\}$ convexe et s.c.i.

Ensuite, on posera $u = z' - z$
et $v = \nabla H(z') - \nabla H(z)$.

On choisira $M_{n+1} = up(M_n, u, v)$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons deux alternatives pour le triplet (z, z', h) déterminant u et v et deux alternatives pour la formule de mise à jour de M_n.

A. Choix des vecteurs *u* et *v*

A.1 Modèle de la régularisée $(x - \breve{f})$

Une première idée naturelle est de prendre $z = x_n$ et $z' = y_k$.
On a ainsi $u = y_k - x_n$.
Ensuite pour des raisons d'implémentation, on prendra pour H, la régularisée de Moreau-Yosida $\breve{F}_k$ du modèle courant $\breve{f}_k$.
Par ce choix, on obtient $v = \nabla\breve{F}_k(y_k) - \nabla\breve{F}_k(x_n)$.
Remarquons cependant que le gradient de $\breve{F}_k$ en x_n est directement disponible, ce qui n'est pas le cas pour le gradient de $\breve{F}_k$ en y_k.
Mais comme par ailleurs, on sait par le lemme 4.5 que

$$\nabla\breve{F}_k(y_k) = M\left(y_k - p_{\breve{f}_k}^{M_n}(y_k)\right),$$

il suffira simplement pour obtenir ce dernier de résoudre une fois de plus le problème quadratique

$$p_{\breve{f}_k}^{M_n}(y_k) = \arg\min_{R^n}\left\{\breve{f}_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - y_k), y - y_k >\right\}.$$

A.2 Régularisée de la fonction objectif (g-f)

Notre second choix se portera sur la régularisée de Moreau-Yosida de f elle-même.
Ici, on choisit d'abord $v = g(y_k) - g(x_n)$ où $g(y_k) \in \partial f(y_k)$ et $g(x_n) \in \partial f(x_n)$.
Ensuite, on calculera x_- et y_- tq $g(x_n) = \nabla F(x_-)$ (4.41)
et $g(y_k) = \nabla F(y_-)$ (4.42)

et finalement on posera $u = y_- - x_-$.
Le théorème suivant nous assure l'existence d'un tel x_- et d'un tel y_- et nous permet également de les calculer.

Proposition 4.5

Soit $z \in R^n$ tel qu'il existe $G \in \partial h(z)$. Alors si $z_- = z + M^{-1}G$, on a $$G = \nabla H(z_-).$$ De plus $p_h^M(z_-) = z$.

Preuve : voir appendice (§ 4.2.5).

□

Ce théorème nous assure non seulement l'existence d'un x_- et d'un y_- vérifiant les inégalités (4.41) et (4.42) mais il nous permet également de les calculer.

En effet, comme $g(x_n) \in \partial f(x_n)$, en appliquant la proposition précédente avec $z = x_n$, $h = f$, $M = M_n$ et $G = g(x_n)$, on obtient

$$x_- = x_n + M_n^{-1} g(x_n).$$

D'autre part , comme $g(y_k) \in \partial f(y_k)$, par un raisonnement analogue on obtient

$$y_- = y_k + M_n^{-1} g(y_k).$$

En conclusion, on prend dans cette seconde option

$$u = y_k + M_n^{-1} g(y_k) - \left[x_n + M_n^{-1} g(x_n)\right] \text{ et } v = g(y_k) - g(x_n).$$

Cela peut se réécrire comme suit en prenant x_{n+1} au lieu de y_k

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n\,, \qquad (4.43)$$

$$v = g(x_{n+1}) - g(x_n), \qquad (4.44)$$

$$u = \Delta x + M_n^{-1} v. \qquad (4.45)$$

B. Choix de la formule de mise à jour

Après avoir étudié divers choix possibles pour les vecteurs u et v, on donnera différentes formules de mise à jour.

Mais avant cela, il est important de remarquer que la propriété $v = \nabla H(z') - \nabla H(z)$ assure que $< v, u >$ est positif (voir proposition 4.6 ci-après).

La situation où $< v, u > = 0$ est décrite par la proposition 4.7 ci après.

Proposition 4.6

Par les choix précédents de u et v,
on a $< v, u > \geq 0$.

Preuve :

Comme le sous-différentiel d'une fonction convexe est monotone (voir proposition IV.5 en annexe), on a

$$\forall z, z' \quad < \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z > \geq 0.$$

Or par définition $v = \nabla H(z') - \nabla H(z)$ et $u = z' - z$. Par conséquent

$$< v, u > \geq 0.$$

□

Proposition 4.7

Soit h une fonction convexe, propre, s.c.i. et H la régularisée Moreau-Yosida de h.
Alors $< \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z > = 0$ si et seulement si $\nabla H(z') = \nabla H(z)$.

En d'autres mots cela signifie que $< v, u > = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Preuve :

- Montrons tout d'abord que $\nabla H(z') = \nabla H(z)$ implique $< \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z > = 0$.
  Par hypothèse $\nabla H(z') = \nabla H(z)$. Dès lors

  $$\nabla H(z') - \nabla H(z) = 0.$$

  D'où

  $$< \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z > = 0.$$

- Montrons ensuite qu'inversement $< \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z > = 0$ implique $\nabla H(z') = \nabla H(z)$.
  - Pour cela remarquons dans un premier temps que $H(x)$ est affine sur $[z', z]$.
    Soit $x = z' + \alpha(z - z')$ où $\alpha \in [0,1]$.
    Comme H est une fonction convexe à valeur dans R et différentiable, on a

    $$H(x) \geq H(z') + < \nabla H(z'), x - z' >$$

    et

    $$H(x) \geq H(z) + < \nabla H(z), x - z >.$$

D'où en utilisant la définition de x

$$H(x) \geq H(z') + \alpha < \nabla H(z'), z - z' >$$

et

$$H(x) \geq H(z) + < \nabla H(z), (z' - z) + \alpha (z - z') > .$$

Dès lors comme $0 \leq \alpha \leq 1$

$$(1-\alpha) H(x) \geq (1-\alpha) H(z') + \alpha (1-\alpha) < \nabla H(z'), z - z' >$$

et

$$\alpha H(x) \geq \alpha H(z) - \alpha (1-\alpha) < \nabla H(z), z - z' > .$$

En additionnant les deux inégalités précédentes, on trouve

$$H(x) \geq \alpha H(z) + (1-\alpha) H(z') + \alpha (1-\alpha) < \nabla H(z') - \nabla H(z), z - z' >$$

et comme par hypothèse $< \nabla H(z') - \nabla H(z), z - z' >= 0$, on en déduit

$$H(x) \geq \alpha H(z) + (1-\alpha) H(z') .$$

D'autre part, par convexité de H on a

$$H(\alpha z + (1-\alpha) z') \leq \alpha H(z) + (1-\alpha) H(z')$$

ou encore

$$H(x) \leq \alpha H(z) + (1-\alpha) H(z') .$$

Par conséquent

$$H(x) = \alpha H(z) + (1-\alpha) H(z')$$

et comme x est un point quelconque de $[z', z]$ on en déduit finalement que H est affine sur $[z', z]$.

- Dans un second temps, nous prouvons que ∇H est une fonction constante sur $]z', z[$.

  Soient x et x' deux points quelconques de $]z', z[$.
  Comme H est convexe, finie et différentiable (voir lemme 4.4), on a pour tout z

$$\begin{aligned} H(z) &\geq H(x) + < \nabla H(x), z - x > \\ &= H(x') - H(x') + H(x) + < \nabla H(x), z - x' > + < \nabla H(x), x' - x > \\ &= H(x') + < \nabla H(x), z - x' > - \varepsilon \end{aligned}$$

  où $\varepsilon = H(x') - H(x) - < \nabla H(x), x' - x >$.
  De plus on sait que $H(x)$ est affine sur $[z', z]$. Par conséquent

$$H(x') = H(x) + < \nabla H(x), x' - x > .$$

  Par conséquent $\varepsilon = 0$.
  Dès lors pour tout z

$$H(z) \geq H(x') + < \nabla H(x), z - x' >$$

  et donc

$$\nabla H(x) \in \partial H(x') .$$

Or comme H est différentiable $\partial H(x') = \{\nabla H(x')\}$ (voir proposition IV.8 en annexe).
D'où

$$\nabla H(x) = \nabla H(x').$$

x et x' étant deux points quelconques dans $]z', z[$ ∇H est donc constante sur $]z', z[$.

- Pour terminer, il reste finalement à montrer que $\nabla H(z') = \nabla H(z)$.

  Comme H est une fonction convexe, finie et différentiable elle est continûment différentiable (voir proposition I.12 en annexe).
  Par conséquent l'égalité $\nabla H(x) = \nabla H(x')$ s'étend aux points z', z.

□

Nous pouvons maintenant discuter des différentes mises à jour.

B.1 Variante de la diagonale quasi-Newton (dqN)

Dans cette première mise à jour, on considère des matrices proportionnelles à l'identité. Les matrices seront donc de la forme $M_n = \mu_n I$.
Dans cette section, on procédera en deux étapes :
- supposer que l'on se trouve à l'itération n et proposer un choix pour μ_{n+1}.
- discuter du caractère dégénéré ou non de la matrice M_{n+1}.

1) Comment choisir μ_{n+1} ?

Etant donné u et v, on va choisir μ_{n+1} de façon à ce qu'il minimise la fonction $\frac{1}{2}\left\|\frac{v}{\mu} - u\right\|^2$.

Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si } \langle v, u \rangle > 0, \text{ alors} & \mu_{n+1} = \dfrac{\|v\|^2}{\langle v, u \rangle} \\ \text{Sinon} & \mu_{n+1} = 0. \end{array}} \tag{4.46}$$

<u>Preuve</u> :

Comme on a choisi μ_{n+1} de façon à ce qu'il minimise la fonction $\frac{1}{2}\left\|\frac{v}{\mu} - u\right\|^2$, il annule sa dérivée.
Par conséquent on a

$$\frac{d}{d\mu}\left[\frac{1}{2}\left\|\frac{v}{\mu} - u\right\|^2\right](\mu_{n+1}) = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{d\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\mu^2}+\frac{1}{2}\|u\|^2-<\frac{v}{\mu},u>\right](\mu_{n+1})=0.$$

On a donc

$$-\frac{\|v\|^2}{(\mu_{n+1})^3}+\frac{1}{\mu_{n+1}^2}<v,u>=0$$

ou encore

$$-\|v\|^2+\mu_{n+1}<v,u>=0.$$

- Supposons d'abord que $<v,u>$ soit non nul.

  Dans ce cas, il est évident que $\mu_{n+1}=\dfrac{\|v\|^2}{<v,u>}$.

  De plus en appliquant les propositions 4.6 et 4.7, on obtient automatiquement que

$$<v,u>>0.$$

- Supposons ensuite que $<v,u>=0$ et montrons que μ_{n+1} est nul.

  Par la proposition 4.7 $<v,u>=0$ si et seulement si $v=0$.

  Par conséquent $-\|v\|^2+\mu_{n+1}<v,u>=0$ est vraie pour toute valeur de μ_{n+1}. On peut dès lors prendre n'importe quelle valeur de μ_{n+1}.
  Cependant, par définition de v, $v=0$ si et seulement si $\nabla H(z'-z)=0$.
  La courbure de H le long de u est donc nulle.
  On va donc choisir μ_{n+1} pour que la courbure <u>prédite</u> le long de u (c'est-à-dire $M_{n+1}u$) soit nulle elle aussi.
  Par conséquent, on choisira $\mu_{n+1}=0$.

2) Dégénérescence de M_{n+1}

Après avoir muni l'algorithme des plans sécants de la mise à jour diagonale, nous allons regarder si les matrices ainsi obtenues sont définies positives ou non.
Cela nous permettra lorsque l'on étudiera l'analyse de convergence de l'algorithme, de savoir si on peut réutiliser ou non les résultats de la première partie du paragraphe 4.
Cependant, comme l'indique la proposition 4.8 ci-après, les matrices ne seront pas toujours définies positives.
Seul le caractère semi-défini positif sera toujours vérifié.

Proposition 4.8

Soit M_{n+1} la mise à jour dqN de M_n . M_{n+1} est semi-définie positive, et de plus M_{n+1} est dégénérée si et seulement si $v = 0$.

Preuve.:

Par (4.46) on a la relation $M_{n+1} = \mu_{n+1} I$,

dans laquelle si $< v, u > > 0$ $\quad \mu_{n+1} = \dfrac{\|v\|^2}{< v, u >}$

sinon $\quad \mu_{n+1} = 0$.

Par conséquent μ_{n+1} est positif et de plus $\mu_{n+1} = 0$ si et seulement si $v = 0$ (voir proposition 4.7). Dès lors comme μ_{n+1} est la seule valeur propre de M_{n+1}, on en déduit que M_{n+1} est semi-définie positive et que M_{n+1} est dégénérée si et seulement si $v = 0$.

□

Passons maintenant à la seconde mise à jour des matrices définissant les métriques.

B.2 Variante "full quasi-Newton" (fqN)

Dans cette section, nous procéderons de manière fort semblable à ce que nous avons fait précédemment :

- d'abord expliciter le choix de M_{n+1}.
- Ensuite étudier le caractère dégénéré ou non de la matrice.

1) Comment choisir M_{n+1} ?

Dans cette seconde variante, on suppose que l'on dispose d'une matrice symétrique définie positive M_n et on met à jour cette matrice en utilisant la formule BFGS

$$\boxed{\begin{array}{llll} M_{n+1} = M_n + A - B & & & \\ \text{où} & \text{si } < v, u > \neq 0 & A = \dfrac{vv^{\mathrm{T}}}{< v, u >} & \text{sinon } A = 0 \\ \text{et où} & \text{si } M_n u \neq 0 & B = \dfrac{M_n u u^{\mathrm{T}} M_n}{< M_n u, u >} & \text{sinon } B = 0. \end{array}} \qquad (4.47)$$

Remarque : Pour que la variante ci-dessus soit bien définie il faut pouvoir diviser par $< M_n u, u >$ lorsque $M_n u \neq 0$.
C'est justement ce que le lemme suivant nous autorise à faire.

Lemme 4.8

$\boxed{M_n u \neq 0 \quad \text{si et seulement si} \quad < M_n u, u > \neq 0.}$

Preuve :

- Montrons d'abord que $< M_n u, u > \neq 0$ implique $M_n u \neq 0$.

  Supposons par l'absurde que $M_n u = 0$.
  Dans ce cas on aurait $< M_n u, u > = < 0, u > = 0$,
  ce qui est contraire à notre hypothèse $< M_n u, u > \neq 0$.

- Ensuite, montrons qu'inversement si $M_n u$ est non nul, alors $< M_n u, u >$ ne peut pas non plus être nul.

  Supposons par l'absurde que $< M_n u, u > = u^{\mathrm{T}} M_n u$ soit nul et montrons que dans ce cas on contredit l'hypothèse $M_n u = 0$.

  Comme M_n est une matrice définie positive, elle possède une racine carrée $(M_n)^{\frac{1}{2}}$. Par conséquent l'hypothèse que nous avons supposée par l'absurde $u^{\mathrm{T}} M_n u = 0$ se réduit à $u^{\mathrm{T}} (M_n)^{\frac{1}{2}} (M_n)^{\frac{1}{2}} u = 0$ qui n'est rien d'autre que l'égalité $\left\| (M_n)^{\frac{1}{2}} u \right\| = 0 \qquad (4.48)$

  Par ailleurs, il est assez facile de voir que (4.48) implique $(M_n)^{\frac{1}{2}} u = 0$ ou encore $M_n u = 0$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

$\square$

Avant d'étudier le caractère dégénéré des matrices définies ci-dessus, nous établissons deux caractéristiques importantes de la mise à jour fqN.

- Montrons d'abord que cette mise à jour est consistante.
  En effet,
  - le choix $A = 0$ a déjà été expliqué dans la variante diagonale,
  - le choix $B = 0$ est similaire : on veut que la courbure prédite soit nulle lorsque $M_n u = 0$,
  - comme pour l'équation quasi-Newton M_{n+1} vérifie l'équation sécante $M_{n+1} u = v$ (voir lemme 4.9 ci-après).

Lemme 4.9

Soit M_{n+1} la mise à jour fqN de M_n, alors $M_{n+1}u = v$.

- Dans un premier temps, montrons que $M_n u = Bu$.

  Par définition,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & M_n u \neq 0 \;\text{ alors }\; B = \dfrac{M_n u u^{\mathrm{T}} M_n}{< M_n u, u >}, \\ \text{sinon} & B = 0. \end{array}$$

  Dès lors,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & M_n u \neq 0 \;\text{ alors }\; Bu = \dfrac{M_n u u^{\mathrm{T}} M_n u}{< M_n u, u >}, \\ \text{sinon} & Bu = 0. \end{array}$$

  Donc comme $u^{\mathrm{T}} M_n u = < M_n u, u >$, on en déduit que

$$\begin{array}{ll} \text{si} & M_n u \neq 0 \;\text{ alors }\; Bu = M_n u, \\ \text{sinon} & Bu = 0. \end{array}$$

  Par conséquent,

$$Bu = M_n u.$$

- Montrons ensuite que $M_{n+1}u = v$.

  Par la relation (4.47) on a $M_{n+1} = M_n + A - B$.
  Donc en multipliant par u on en déduit

$$M_{n+1}u = M_n u + Au - Bu.$$

  Comme par ailleurs, on sait que $M_n u = Bu$, on en déduit

$$M_{n+1}u = Au.$$

  Or en utilisant à nouveau la relation (4.47) on sait que

$$\begin{array}{ll} \text{si} & < v, u > \neq 0 \;\text{ alors }\; A = \dfrac{vv^{\mathrm{T}}}{< v, u >}, \\ \text{sinon} & A = 0. \end{array}$$

  Par conséquent,

$$\begin{array}{ll} \text{si} & < v, u > \neq 0 \;\text{ alors }\; M_{n+1}u = \dfrac{vv^{\mathrm{T}} u}{< v, u >}, \\ \text{sinon} & M_{n+1}u = 0 \end{array}$$

et dès lors, en appliquant la proposition 4.7 on obtient

$$\text{si} \quad v \neq 0 \ \text{alors} \quad M_{n+1}u = \frac{v < v,u >}{< v,u >},$$
$$\text{sinon} \quad M_{n+1}u = 0$$

ou encore de manière équivalente

$$M_{n+1}u = v.$$

□

- Montrons ensuite que cette mise à jour est <u>robuste</u> dans le sens où les matrices A, B *et* M_n sont liées entre elles par l'inégalité

$$\text{tr } A \leq \Lambda_n \quad \text{et tr } B \leq \Lambda_n$$

où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

Avant de montrer cette propriété, deux inégalités sont requises.
Le lemme suivant décrit la première de celles-ci.

<u>Lemme 4.10</u>

Si $< v,u > \neq 0$,
alors $\dfrac{\|v\|^2}{< v,u >} \leq \Lambda_n$
où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

<u>Preuve :</u>

Comme M_n est définie positive, on peut appliquer le lemme 4.7 avec $M = M_n$.
On obtient ainsi

$$\|\nabla H(z') - \nabla H(z)\|^2 \leq \Lambda_n < \nabla H(z') - \nabla H(z), z' - z >,$$

où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

Or comme par définition, $v = \nabla H(z') - \nabla H(z)$ et $u = z' - z$,
l'inégalité précédente peut alors se réécrire

$$\|v\|^2 \leq \Lambda_n < v,u >.$$

□

La seconde inégalité est donnée par le lemme 4.11.

Lemme 4.11

Pour tout $u \notin Ker\, M_n$, on a $\dfrac{\|M_n u\|^2}{< M_n u, u >} \leq \Lambda_n$

où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

Preuve :

- Remarquons pour commencer que $\dfrac{\|M_n u\|^2}{< M_n u, u >}$ est bien défini lorsque $u \notin Ker\, M_n$.

  Pour cela il suffit de voir que $< M_n u, u > \neq 0$ pour tout u tel que $M_n u \neq 0$. Cela découle du lemme 4.8.

- Montrons ensuite que pour tout $u \notin Ker\, M_n$, on a $\dfrac{\|M_n u\|^2}{< M_n u, u >} \leq \Lambda_n$

  où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

  A cet effet, prenons un vecteur u vérifiant $M_n u \neq 0$ et montrons que

  $\dfrac{\|M_n u\|^2}{< M_n u, u >} \leq \Lambda_n$.

  Comme M_n est définie positive, elle possède une racine carrée $(M_n)^{\frac{1}{2}}$.

  Posons alors $z = (M_n)^{\frac{1}{2}} u$. (4. 49)

  On a ainsi

$$\|M_n u\|^2 = < M_n u, M_n u > = < (M_n)^{\frac{1}{2}} (M_n)^{\frac{1}{2}} u, (M_n)^{\frac{1}{2}} (M_n)^{\frac{1}{2}} u >$$
$$= < (M_n)^{\frac{1}{2}} z, (M_n)^{\frac{1}{2}} z >.$$

  En utilisant le fait que M_n est une matrice symétrique on en déduit

$$\|M_n u\|^2 = < M_n z, z >. \qquad (4.50)$$

  Or d'autre part

$$< M_n u, u > = < (M_n)^{\frac{1}{2}} (M_n)^{\frac{1}{2}} u, u >$$
$$= < M_n^{\frac{1}{2}} u, M_n^{\frac{1}{2}} u >$$
$$= < z, z > = \|z\|^2. \qquad (4.51)$$

  La seconde égalité provient du caractère symétrique de M_n et la troisième de la relation (4.49).

On peut donc déduire des relations (4.50) et (4.51) que

$$\frac{\|M_n u\|^2}{<M_n u, u>} = \frac{<M_n z, z>}{\|z\|^2}.$$

En utilisant les propriétés du quotient de Rayleigh (voir proposition VI.5 en annexe), on obtient ainsi

$$\frac{<M_n z, z>}{\|z\|^2} \leq \Lambda_n$$

où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.
Par conséquent,

$$\frac{\|M_n u\|^2}{<M_n u, u>} \leq \Lambda_n.$$

□

Les inégalités décrites dans les deux lemmes précédents nous permettent de montrer le caractère robuste de la mise à jour fqN, à savoir
tr $A \leq \Lambda_n$ et tr $B \leq \Lambda_n$ (voir lemme 4.12).

Lemme 4.12

tr $A \leq \Lambda_n$ et tr $B \leq \Lambda_n$
où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.

Preuve :

- Montrons dans un premier temps que tr $A \leq \Lambda_n$.

  Par définition, on a

  si $<v, u> \neq 0$ alors $A = \dfrac{vv^T}{<v, u>}$,

  sinon $A = 0$.

  Par conséquent, on obtient

  si $<v, u> \neq 0$ alors tr $A = \dfrac{\|v\|^2}{<v, u>}$,

  sinon tr $A = 0$.

  Par ailleurs M_n étant une matrice définie positive, l'inégalité $0 \leq \Lambda_n$ est toujours satisfaite. Il suffit dès lors, pour montrer que *tr* $A \leq \Lambda_n$, de prouver que $\dfrac{\|v\|^2}{<v, u>} \leq \Lambda_n$ lorsque $<v, u> \neq 0$, ce qui découle directement du lemme 4.10.

- Montrons ensuite que $tr\ B \leq \Lambda_n$.

  Par définition, on a en effet

$$\text{si} \quad M_n u \neq 0 \quad \text{alors} \quad B = \frac{M_n u u^{\mathrm{T}} M_n}{< M_n u, u >},$$
$$\text{sinon} \quad B = 0.$$

  Par conséquent, on obtient

$$\text{si} \quad M_n u \neq 0 \quad \text{alors} \quad \text{tr } B = \frac{\|M_n u\|^2}{< M_n u, u >},$$
$$\text{sinon} \quad \text{tr } B = 0.$$

  Comme d'autre part, l'inégalité $0 \leq \Lambda_n$ est toujours vérifiée grâce au caractère défini positif de M_n, il suffit d'appliquer le lemme 4.11 pour obtenir l'inégalité

$$tr\ B \leq \Lambda_n.$$

□

Passons maintenant à l'étude de la dégénérescence de M_{n+1}.

2) Dégénérescence de M_{n+1}

Après avoir muni l'algorithme des plans sécants de la variante dqN, nous avons constaté que nous ne pouvions pas toujours utiliser les résultats de la première partie du paragraphe 4 pour étudier l'analyse de convergence de l'algorithme 4.2 car les matrices n'étaient pas toutes définies positives. Vérifions maintenant ce qu'il en est lorsqu'on munit l'algorithme des plans sécants de la variante fqN.

Proposition 4.9

Soit M_{n+1} la mise à jour fqN de M_n . M_{n+1} est semi-définie positive et de plus M_{n+1} est dégénérée si et seulement si $v = 0$.

Preuve :

Comme M_n est une matrice définie positive et que M_{n+1} vérifie l'équation sécante $M_{n+1}u = v$, on obtient par les propriétés de mise à jour BFGS (voir proposition VI.7 en annexe) que M_{n+1} est semi-définie positive et que M_{n+1} est dégénérée si et seulement si $< v, u > = 0$.

Par conséquent, en utilisant la proposition 4.7, on obtient finalement que M_{n+1} est semi-définie positive et qu'elle est dégénérée si et seulement si $v = 0$.

□

Conclusion

Ici non plus les matrices ne seront pas nécessairement toutes définies positives. Il faudra encore essayer d'éviter les matrices dégénérées.

Le chapitre suivant nous indique comment éviter cette dégénérescence.

4.2.2.3 Comment éviter la dégénérescence de M_{n+1}

Comme on l'a constaté dans l'algorithme précédent, on a tout intérêt à essayer d'éviter les matrices M_{n+1} dégénérées.

Or on sait par les propositions 4.8 et 4.9 que M_{n+1} est dégénérée lorsque $v = 0$. Par conséquent, pour essayer d'éviter que M_{n+1} ne soit dégénérée, on va essayer de prendre v différent de zéro.

Cependant, garantir cette propriété semble assez difficile pour la variante $\left(x - \breve{f}\right)$ car dans cette dernière $v = 0$ signifie $\nabla\breve{F}_k\left(y_k\right) = \nabla\breve{F}_k\left(x_n\right)$; ce qui est une éventualité tout à fait probable.

Par contre, garantir $v \neq 0$ est direct dans la variante $\left(g - f\right)$ comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.10

Si u et v sont donnés par la variante $\left(g - f\right)$ alors en prenant $m' < 1$, on obtient

$$< g\left(x_{n+1}\right), x_{n+1} - x_n > \geq -m'\delta_n^{k(n)} \Rightarrow v \neq 0$$

Preuve :

Par définition $\breve{f}_{k(n)}\left(x_{n+1}\right) = \max\limits_{i=1\cdots k(n)} f\left(y_i\right) + < g_i, x_{n+1} - y_i >$.

D'où puisque par définition *k(n)* est l'itération où x_n est mis à jour

$$\breve{f}_{k(n)}\left(x_{n+1}\right) \geq f\left(x_n\right) + < g\left(x_n\right), x_{n+1} - x_n >.$$

Donc, si on ajoute $\frac{1}{2} < M_n\left(x_{n+1} - x_n\right), x_{n+1} - x_n >$ de chaque côté, on obtient

$$f\left(x_n\right) + < g\left(x_n\right), x_{n+1} - x_n > + \frac{1}{2} < M_n\left(x_{n+1} - x_n\right), x_{n+1} - x_n >$$
$$\leq \breve{f}_{k(n)}\left(x_{n+1}\right) + \frac{1}{2} < M_n\left(x_{n+1} - x_n\right), x_{n+1} - x_n > .$$

D'autre part, comme M_n est définie positive $< M_n(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n > \geq 0$ et donc $f(x_n) + < g(x_n), x_{n+1} - x_n > \leq f(x_n) + < g(x_n), x_{n+1} - x_n > + \frac{1}{2} < M_n(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n >$.

Par conséquent

$$f(x_n) + < g(x_n), x_{n+1} - x_n > \leq \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) + \frac{1}{2} < M_n(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n >.$$

Dès lors, comme on a par définition

$\delta_n^{k(n)} = f(x_n) - \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) - \frac{1}{2} < M_n(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n >$, on en déduit

$$< g(x_n), x_{n+1} - x_n > \leq -\delta_n^{k(n)}.$$

Par ailleurs comme v est donné par la contrainte $(g - f)$, on a $v = g(x_{n+1}) - g(x_n)$.
Donc

$$< v, \Delta x > = < g(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n > - < g(x_n), x_{n+1} - x_n >.$$

De plus, comme par hypothèse $< g(x_{n+1}), x_{n+1} - x_n > \geq -m' \delta_n^{k(n)}$ et que d'autre part on a montré que $< g(x_n), x_{n+1} - x_n > \leq -\delta_n^{k(n)}$, on obtient finalement

$$< v, \Delta x > \geq (1 - m')\delta_n^{k(n)}. \qquad (4.52)$$

Or par hypothèse $1 - m' > 0$ et de plus on peut supposer, sans perdre de généralité, que $\delta_n^{k(n)} > 0$, car si ce n'était pas le cas, on serait à l'optimum en x_n.
En effet, supposons par l'absurde que $\delta_n^{k(n)}$ soit nul. Dans ce cas, par définition de $\delta_n^{k(n)}$ et de γ_n on obtiendrait

$$\begin{aligned} 0 = \delta_n^{k(n)} &= f(x_n) - \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) - \frac{1}{2} < M_n(x_{n+1} - x_n), x_{n+1} - x_n > \\ &= f(x_n) - \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) - \frac{1}{2} < \gamma_n, M_n^{-1}\gamma_n >. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété du quotient de Rayleigh (voir proposition VI.5 en annexe) on aurait

$$\begin{aligned} 0 = \delta_n^{k(n)} &\geq f(x_n) - \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) - \frac{1}{2} \lambda_{\max}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{\max}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 + \varepsilon_n \end{aligned}$$

où $\varepsilon_n = f(x_n) - \breve{f}_{k(n)}(x_{n+1}) - \lambda_{\max}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2$.

De plus, en utilisant le caractère défini positif de M_n^{-1} on obtiendrait $\lambda_{\max}(M_n^{-1}) \|\gamma_n\|^2 \geq 0$ et par ailleurs, ε_n est positif (sinon on ne pourrait pas parler du ε_n -sous-différentiel de f en x_n or $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$), par conséquent on en déduirait

$$0 \geq \varepsilon_n + \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left(M_n^{-1}\right)\|\gamma_n\|^2 \geq 0,$$

ce qui impliquerait

$$\varepsilon_n = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{\max}\left(M_n^{-1}\right)\|\gamma_n\|^2 \geq 0,$$

ou encore comme M_n est définie positive

$$\gamma_n = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = 0.$$

Finalement en utilisant le fait que $\gamma_n \in \partial_{\varepsilon_n} f(x_n)$ on en déduirait $0 \in \partial f(x_n)$ et dès lors, x_n minimiserait *f*.

Par conséquent grâce à la supposition que $\delta_n^{k(n)} > 0$ et comme $(1 - m') > 0$, (4.52) se réduit à $< v, \Delta x > > 0$.
Dès lors, comme dans la variante $(g - f)$ on a $u = \Delta x + M_n^{-1} v$, cela donne

$$< v, u > = < v, \Delta x > + < v, M_n^{-1} v >.$$

Donc, comme $< v, \Delta x > > 0$ et $< v, M_n^{-1} v > \geq 0$ (M_n^{-1} définie positive), on en déduit

$$< v, u > > 0$$

et par la proposition 4.7 on a finalement

$$v \neq 0.$$

□

4.2.2.4 Un algorithme amélioré

Avant de passer à une description plus précise d'un nouvel algorithme qui évite les matrices M_{n+1} dégénérées, il reste encore quelques suggestions à faire pour améliorer l'algorithme précédent.

A. Extrapolation

Nous avons déjà souligné que pour avoir un algorithme plus efficace, il fallait chercher le nouvel itéré y_k le long d'une courbe.

Pour cela nous allons ajuster la métrique en remplaçant M_n par $\frac{M_n}{t}$ où $t > 0$.

Par conséquent pour garantir le caractère défini positif des matrices $\frac{M_n}{t}$ il suffira de trouver un candidat $y_k = \arg\min \check{f}_k(y) + \frac{1}{2} < \frac{M_n}{t}(y - x_n), y - x_n >$ vérifiant non seulement le test de descente mais vérifiant aussi la condition $< g(y_k), y_k - x_n > \geq -m'\delta_n^k$.

Cela n'est rien d'autre qu'un critère de type Wolfe sur la longueur du pas *t*.

En effet, en pratique, on vérifie d'abord si le test de descente est satisfait.
Si c'est le cas, on regarde alors si la condition $< g(y_k), y_k - x_n > \geq -m'\delta_n^k$ est vérifiée, auquel cas on effectue un pas de descente puisqu'on est alors assuré que $\frac{M_n}{t}$ est définie positive.

Par contre si seul le test de descente est satisfait, alors on augmente la longueur du pas en espérant que la nouvelle matrice $\frac{M_n}{t}$ ainsi obtenue sera non singulière.

B Interpolation

Dans cette section, nous allons à présent, essayer d'améliorer une autre partie assez délicate de l'algorithme : celle où le test de descente n'est pas vérifié.

Une stratégie possible dans ce cas est soit d'enrichir le faisceau, soit de diminuer la longueur du pas.

En pratique, on procédera de la manière suivante :
on décide de ne faire un pas nul que si la dernière fonction affine de $\breve{f}_k$ obtenue en faisant le pas nul influence le calcul du nouveau candidat.

Par conséquent il ne sera raisonnable de faire un pas nul que lorsque l'erreur de linéarisation $e_c = f(x_n) - [f(y_k) + < g(y_k), x_n - y_k >]$ n'est pas trop grande; c'est-à-dire lorsque $e_c \leq m''\delta_n^k$ où m'' est une tolérance positive.

Si ce n'est pas le cas, on effectue une interpolation en diminuant la longueur du pas.

<u>Remarque</u> :

Une question importante est de savoir si des interpolations répétées vont finalement produire une longueur de pas $t > 0$ tel que $e_c \leq m''\delta_n^k$.

C Nouvel algorithme

Déduisons un algorithme qui tient compte des suggestions précédentes. Cet algorithme utilise l'option $(g - f)$ pour la mise à jour.

Notons un détail important : c'est $\dfrac{M_n}{t}$ et non pas M_n qui est mis à jour.

Algorithme 4.3

<u>PAS 0</u> (initialisation)

Choisir
$$m \in]0,1[,$$
$$m' \in]m,1[,$$
$$m'' > 0,$$
$$x_1 \in R^n.$$

Poser
$$y_1 = x_1,$$
$$M_1 = I,$$
$$n = k = 1 .$$

<u>PAS 1</u> (ajustement de la longueur du pas *t*)

Poser $t = 1$
et exécuter l'algorithme 4.4 pour obtenir $t > 0$ et y_k.

<u>PAS 2</u> (pas de descente)

Mettre à jour $x_{n+1} = y_k$.
Poser $\Delta x = x_{n+1} - x_n$,
$$v = g(x_{n+1}) - g(x_n),$$
$$u = \Delta x + tM_n^{-1}v.$$
Mettre à jour $M_{n+1} = up\left(\dfrac{M_n}{t}, u, v\right)$ et augmenter n de 1.

<u>PAS 3</u> (pas nul)

Augmenter k de 1 et retourner au pas 1.

Algorithme 4.4

PAS 0 Choisir $\bar{t} \in R$.
Poser $j = 1, t_j = 1, l_j = 0$ et $u_j = \bar{t}$.

PAS 1 Calculer

$$y_k = y_k(t_j) = \arg\min\left[\breve{f}_k(y) + \frac{1}{2t_j} < M_n(y - x_n), y - x_n >\right],$$

$$\delta_n^k(t_j) = f(x_n) - \breve{f}_k(y_k) - \frac{1}{2t_j} < M_n(y_k(t_j) - x_n), y_k(t_j) - x_n >,$$

$$e^c = f(x_n) - \left[f(y_k(t_j)) + < g(y_k(t_j)), x_n - y_k(t_j) >\right].$$

PAS 2 Si $f(y_k(t_j)) > f(x_n) - m\delta_n^k(t_j)$ (4.53)
alors aller au pas 4.

PAS 3 Si $< g(y_k(t_j)), y_k(t_j) - x_n > \geq -m'\delta_n^k(t_j)$ (4.54)
alors sortir de l'algorithme 4.4 et faire un pas de descente
(cfr. pas 2 de l'algorithme 4.3),
sinon poser $l_{j+1} = t_j$, $u_{j+1} = u_j$, $j = j + 1$,
calculer t_j dans $]l_j, u_j[$ et retourner au pas 1.

PAS 4 Si $l_j = 0$ et $e_c \leq m''\delta_n^k(t_j)$ (4.55)
alors sortir de l'algorithme 4.4 et faire un pas nul
(cfr. pas 3 de l'algorithme 4.3)
sinon poser $u_{j+1} = t_j$, $l_{j+1} = l_j$, $j = j + 1$,
calculer un nouveau t_j dans $]l_j, u_j[$.

Remarque :

Dans la condition de sortie de l'algorithme 4.4 par le pas 4, on exige que $l_j = 0$, car si ce n'était pas le cas, cela voudrait dire que l'on a déjà modifié la valeur de l_j et ce, dans le pas 3 de l'algorithme .

On espère donc dans ce cas pouvoir faire un pas de descente. C'est pourquoi on empêche de sortir de l'algorithme en faisant un pas nul.

Dans la suite de cette seconde partie du paragraphe 4, nous étudierons la trajectoire $y_k(t)$. Après quoi, nous terminerons ce chapitre par quelques commentaires sur la convergence de l'algorithme.

4.2.3 Trajectoire de $y_k(\cdot)$

Dans cette section, nous allons établir la continuité de y_k sur $]0,\infty[$.

Pour cela nous procéderons de la manière suivante :

1. Trouver une forme équivalente du problème $\min\limits_{y} \breve{f}_k(y) = \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >$.

   (lemme 4.13)

2. Utiliser celle-ci pour avoir une expression de $y_k(t)$ où $t > 0$ est fixé.

   (lemme 4.14)

3. Finalement, nous aider de cette dernière pour trouver un intervalle de $]0,-\infty[$ sur lequel y_k est linéaire. (lemme 4.15)

4. Pour terminer, nous en déduirons que y_k est linéaire par morceaux (et donc continue) sur $]0,\infty[$. (proposition 4.11).

Lemme 4.13

$$\min_{y} \breve{f}_k(y) + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{y,v}\ v + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >$$

s.c. $v \geq < g_i, y - x_n > -\alpha_i \qquad \forall i = 1 \cdots k$

où $\alpha_i = -f(y_i) - < g_i, x_n - y_i >$.

Preuve :

Par définition,

$$\begin{aligned} \breve{f}_k(y) &= \max_{i=1\cdots k}\{f(y_i) + < g_i, y - y_i >\} \\ &= \max_{i=1\cdots k}\{f(y_i) + < g_i, x_n + y - x_n - y_i >\} \\ &= \max_{i=1\cdots k}\{< g_i, y - x_n > + f(y_i) + < g_i, x_n - y_i >\}. \end{aligned}$$

D'où en posant $\alpha_i = -f(y_i) - < g_i, x_n - y_i >$, on obtient

$$\breve{f}_k(y) = \max_{i=1\cdots k}\{< g_i, y - x_n > -\alpha_i\}.$$

Par conséquent

$$\min_{y} \breve{f}_k(y) + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >$$

$$\Updownarrow$$

$$\min_{y,v}\ v + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >$$

s.c. $v \geq < g_i, y - x_n > -\alpha_i \qquad \forall i = 1 \cdots k$.

$\square$

Avec les notations
$I = \{1 \cdots k\}$

$I(t) = \left\{ j \in I \,\middle|\, <g_j, y(t) - x_n> - \alpha_j = \max_{i \in I} \{ <g_i, y(t) - x_n> - \alpha_i \} \right\}$

et

$\Lambda = \left\{ \lambda \in R^k \quad tq \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad et \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\},$

le lemme suivant nous donne la caractérisation de la trajectoire $y_k(t)$.

Lemme 4.14

> Soit $t > 0$ fixé.
> $y = y_k(t)$ si et seulement si
> $\exists \lambda(t) \in R^k \quad tq \quad M_n(y - x_n) = -t \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(t) g_i, \lambda(t) \in \Lambda \; et \; \lambda_i(t) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I(t).$

Preuve :

Par définition, on a $y_k(t) = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \breve{f}_k(y) + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n >.$

D'où, par le lemme 4.13

$$\begin{cases} y_k(t) = \underset{v,y}{\operatorname{argmin}}\, v + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n > \\ où \quad v \geq <g_i, y - x_n> - \alpha_i \qquad \forall i = 1 \cdots k. \end{cases}$$

Si on écrit les conditions de Kuhn-Tucker pour ce problème (voir proposition V.5 en annexe), on obtient qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i(t) \quad i \in \{1, \cdots, k\}$ tels que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \partial_v \left(v + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n > + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \left(<g_i, y - x_n> - \alpha_i - v \right) \right) \\ \partial_y \left(v + \frac{1}{2t} < M_n(y - x_n), y - x_n > + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \left(<g_i, y - x_n> - \alpha_i - v \right) \right) \end{pmatrix} \\ et \quad \lambda_i(t) \left(<g_i, y - x_n> - \alpha_i - v \right) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i \in I} \lambda_i(t) \\ \frac{1}{t} M_n(y - x_n) + \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i \end{pmatrix} \\ et \quad \lambda_i(t) \left(<g_i, y - x_n> - \alpha_i - v \right) = 0, \quad \lambda_i(t) \geq 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} \sum_{i\in I} \lambda_i(t) = 1, \quad \lambda_i(t) \geq 0, \\ M_n\left(y - x_n\right) = -t\sum_{i\in I} \lambda_i(t) g_i, \\ < g_i, y - x_n > -\alpha_i \neq v \ \text{ implique } \ \lambda_i(t) = 0. \end{cases}$$

De plus comme

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{y,v} & v + \frac{1}{2t} < M_n\left(y - x_n\right), y - x_n > \\ s.c. & v \geq < g_i, y - x_n > -\alpha_i \quad \forall i = 1 \cdots k \end{array}$$

est un problème convexe, les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité (voir proposition V.5 en annexe).

Par conséquent, comme $v = \max\limits_{i=1\cdots k}\left\{< g_i, y - x_n > -\alpha_i\right\}$ on obtient par définition de $I(t)$ que

$y = y_k(t)$ si et seulement si

$$M_n\left(y - x_n\right) = -t\sum_{i\in I} \lambda_i(t) g_i, \quad \lambda(t) \in \Lambda, \quad \lambda_i(t) = 0 \qquad \forall i \in I \setminus I(t).$$

□

Comme $|I| < \infty$, il n'existe qu'un nombre fini de sous-ensembles de I, à savoir : $I^1 \cdots I^m$
A ces ensembles I^j, on associe

$$\mathrm{T}^j = \left\{t \in \left]0, \infty\right[\quad tq \quad I(t) = I^j\right\} \qquad \forall j = 1 \cdots m.$$

Par le lemme suivant :

- chaque T^j est un intervalle,
- $y_k(\cdot)$ est une fonction linéaire sur chaque T^j.

<u>Lemme 4.15</u>

Supposons $0 < t_1 < t_2$ et prenons t_1, t_2 appartenant au même T^j,
alors on a

1) $\left[t_1, t_2\right] \subseteq T^j$
2) $y_k\left(\mu t_1 + (1-\mu) t_2\right) = \mu y_k\left(t_1\right) + \left(1-\mu\right) y_k\left(t_2\right)$.

Preuve :

- En premier lieu, prouvons que $[t_1, t_2] \subseteq \mathrm{T}^j$.

  Pour cela prenons un μ quelconque dans l'intervalle $[0,1]$.

  Ensuite posons $t_\mu = \mu\, t_1 + (1-\mu) t_2$ et montrons que $t_\mu \in T^j$.

  - Donnons d'abord une première caractérisation de l'ensemble I^j.

    Pour $i = 1{,}2$ on a par définition de $I(t_i)$

    $$< g_\beta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\beta = < g_\gamma, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\gamma > < g_\delta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\delta$$

    si et seulement si $\beta, \gamma \in I(t_i)$ $\quad et \quad$ $\delta \notin I(t_i)$.

    Or par hypothèse $t_1, t_2 \in T^j$. On a donc, par définition de T^j

    $$I(t_1) = I(t_2) = I^j.$$

    Dès lors, on a pour $i = 1{,}2$

    $$< g_\beta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\beta = < g_\gamma, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\gamma > < g_\delta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\delta$$

    si et seulement si $\beta, \gamma \in I^j$ $\quad et \quad$ $\delta \notin I^j$. (4.56)

  - A présent cherchons une seconde caractérisation de l'ensemble I^j.

    Comme (4.56) reste vraie quand on remplace $y_k(t_i)$ par $\mu\, y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2)$, on obtient

    $$\begin{aligned} &< g_\beta, \mu\, y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta \\ &\quad = < g_\gamma, \mu\, y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\gamma \\ &\quad > < g_\delta, \mu\, y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\delta \end{aligned}$$

    si et seulement si $\beta, \gamma \in I^j$ $\quad et \quad$ $\delta \notin I^j$.

    En effet ,

    $$\begin{aligned} &< g_\beta, \mu\, y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta \\ &\quad = \mu \{< g_\beta, y_k(t_1) - x_n > -\alpha_\beta\} + (1-\mu)\{< g_\beta, y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta\}. \end{aligned}$$

    Or, par la première caractérisation de I^j on a pour $i = 1{,}2$

    $$\begin{aligned} < g_\beta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\beta &= < g_\gamma, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\gamma \\ &> < g_\delta, y_k(t_i) - x_n > -\alpha_\delta \end{aligned}$$

    si et seulement si $\beta, \gamma \in I^j$ $\quad et \quad$ $\delta \notin I^j$.

Par conséquent ,

$$
\begin{aligned}
&< g_\beta , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta \\
&= \mu\{< g_\gamma , y_k(t_1) - x_n > -\alpha_\gamma\} + (1-\mu)\{< g_\gamma , y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\gamma\} \\
&> \mu\{< g_\delta , y_k(t_1) - x_n > -\alpha_\delta\} + (1-\mu)\{< g_\delta , y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\delta\}
\end{aligned}
$$

si et seulement si $\beta, \gamma \in I^j$ *et* $\delta \notin I^j$.
D'où,

$$
\begin{aligned}
&< g_\beta , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta \\
&= < g_\gamma , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\gamma \\
&> < g_\delta , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\delta
\end{aligned}
$$

si et seulement si $\beta, \gamma \in I^j$ *et* $\delta \notin I^j$.

- Aidons nous maintenant des deux caractéristiques précédentes pour montrer que $t_\mu \in T^j$.
  Comme $I(t_1) = I(t_2)$ et $\mu \in [0,1]$

  $$
  \begin{aligned}
  &\operatorname*{argmax}_i < g_i , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_i \\
  &\quad = \operatorname*{argmax}_i < g_i , y_k(\mu t_1 + (1-\mu) t_2) - x_n > -\alpha_i
  \end{aligned}
  $$

  et donc par définition de $I(t_\mu)$ on a

  $$
  \begin{aligned}
  &< g_\beta , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\beta \\
  &= < g_\gamma , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\gamma \\
  &> < g_\delta , \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) - x_n > -\alpha_\delta
  \end{aligned}
  $$

  si et seulement si $\beta, \gamma \in I(t_\mu)$ *et* $\delta \notin I(t_\mu)$.
  D'où en utilisant le seconde caractérisation de I^j on obtient $I(t_\mu) = I^j$ et donc par définition de T^j on obtient $t_\mu \in T^j$.

- Pour terminer essayons de prouver que pour tout $\mu \in [0,1]$ on a

$$
y_k(\mu t_1 + (1-\mu) t_2) = \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2).
$$

En effet, soit $\mu \in [0,1]$.

Posons $y = \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2),$ (4.57)

$t = t_\mu,$ (4.58)

$$
\lambda(t) = \frac{1}{t_\mu}\left(\mu t_1 \lambda(t_1) + (1-\mu) t_2 \lambda(t_2)\right). \tag{4.59}
$$

- Montrons d'abord que $-t\sum_{i\in I} \lambda_i(t) g_i = M_n(y - x_n)$. (4.60)

  En utilisant les relations (4.58) et (4.59) on obtient

$$
\begin{aligned}
-t\sum_{i\in I}\lambda_i(t)g_i &= -t_\mu\sum_{i\in I}\frac{1}{t_\mu}\left(\mu t_1\lambda_i(t_1)+(1-\mu)t_2\lambda_i(t_2)\right)g_i\\
&= -\mu t_1\sum_{i\in I}\lambda_i(t_1)g_i-(1-\mu)t_2\sum_{i\in I}\lambda_i(t_2)g_i.
\end{aligned}
$$

Or par le lemme 4.14,

$$
\begin{aligned}
-t_1\sum_{i\in I}\lambda_i(t_1)g_i &= M_n\left(y_k(t_1)-x_n\right) \quad et\\
-t_2\sum_{i\in I}\lambda_i(t_2)g_i &= M_n\left(y_k(t_2)-x_n\right).
\end{aligned}
$$

Dès lors,

$$
\begin{aligned}
-t\sum_{i\in I}\lambda_i(t)g_i &= \mu M_n\left(y_k(t_1)-x_n\right)+(1-\mu)M_n\left(y_k(t_2)-x_n\right)\\
&= M_n\left(\left[\mu y_k(t_1)+(1-\mu)y_k(t_2)\right]-x_n\right)\\
&= M_n\left(y-x_n\right).
\end{aligned}
$$

- Ensuite, remarquons que $\lambda(t)\in\Lambda$ lorsque $t=t_\mu$. (4.61)

  En effet, par le lemme 4.14

$$
\begin{aligned}
&\lambda(t_1)\in\Lambda, \lambda_i(t_1)=0 \qquad \forall i\in I\setminus I(t_1) \qquad \text{et}\\
&\lambda(t_2)\in\Lambda, \lambda_i(t_2)=0 \qquad \forall i\in I\setminus I(t_2).
\end{aligned}
$$

  Donc, par définition de Λ on a

$$
\begin{aligned}
&\lambda_i(t_1)\geq 0, \quad \sum_{i\in I}\lambda_i(t_1)=1 \quad \text{et}\\
&\lambda_i(t_2)\geq 0, \quad \sum_{i\in I}\lambda_i(t_2)=1.
\end{aligned}
$$

  Dès lors en utilisant (4.59) on obtient

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\lambda_i(t) &= \frac{1}{t_\mu}\left(\mu t_1\sum_{i\in I}\lambda_i(t_1)+(1-\mu)t_2\sum_{i\in I}\lambda_i(t_2)\right)\\
&= \frac{\mu t_1+(1-\mu)t_2}{t_\mu}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

  et de plus $\lambda_i(t)=\frac{1}{t_\mu}\left(\mu t_1\lambda_i(t_1)+(1-\mu)t_2\lambda_i(t_2)\right)\geq 0$.

  Par conséquent $\lambda(t)\in\Lambda$.

- A présent, établissons l'égalité suivante

$$
\lambda_i(t)=0 \qquad \forall i\in I\setminus I(t). \tag{4.62}
$$

  Par la première assertion de ce lemme t_1, t_2 *et* $t_\mu\in T^j$.

D'où

$$I(t_\mu) = I^j = I(t_1) = I(t_2).$$

Dès lors comme par le lemme 4.14

$$\lambda_i(t_1) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I(t_1) \quad \text{et} \quad \lambda_i(t_2) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I(t_2),$$

on a

$$\lambda_i(t_1) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I^j \quad et \quad \lambda_i(t_2) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I^j.$$

D'où

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{t_\mu}\left(\mu t_1 \lambda_i(t_1) + (1-\mu) t_2 \lambda_i(t_2)\right) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I^j.$$

Par conséquent, comme $I(t_\mu) = I^j$ et $t = t_\mu$, on en déduit que

$$\lambda_i(t) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I(t).$$

- Finalement, déduisons des relations (4.60), (4.61) et (4.62) que

$$y_k(t_\mu) = \mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2).$$

En effet, par la relation (4.60)

$$-t \sum_{i \in I} \lambda_i(t) g_i = M_n(y - x_n)$$

et en combinant les relations (4.61) et (4.62), on obtient

$$\lambda(t) \in \Lambda \quad et \quad \lambda_i(t) = 0 \quad \forall i \in I \setminus I(t).$$

Dès lors en appliquant le lemme 4.14, on obtient $y = y_k(t)$ ou encore, par définition de y_k et de t

$$\mu y_k(t_1) + (1-\mu) y_k(t_2) = y_k(\mu t_1 + (1-\mu) t_2).$$

Ceci prouve la seconde assertion.

□

Sans perdre de généralité, on peut supposer $T^j \neq \varnothing \quad \forall j$ et de plus par le lemme précédent les T^j sont tous égaux ou disjoints.
On peut donc résumer les lemmes précédents de la manière suivante.

Proposition 4.11

Il existe un nombre fini d'intervalles réels disjoints T^j formant une partition de $]0,\infty[$ et tels que $y_k(\cdot)$ est linéaire sur chaque T^j.

En d'autres termes $y_k(\cdot)$ est une fonction linéaire par morceaux sur $]0,\infty[$.
$y_k(\cdot)$ est donc une fonction continue sur $]0,\infty[$.

4.2.4 Convergence

Pour pouvoir réutiliser les résultats de convergence de l'algorithme 4.1, il faut que les matrices engendrées par l'algorithme 4.3 soient toutes définies positives.

Pour cela, il suffit simplement de voir que l'algorithme 4.4 se finit toujours après un nombre fini d'itérations.

Cependant, cette question reste encore une question ouverte car on ne peut montrer le caractère fini du nombre d'itérations de l'algorithme 4.4 que dans le cas où on itère entre le pas 3 et le pas 4 de cet algorithme.

Proposition 4.12

Lorsqu'on itère le pas 3 et le pas 4 de l'algorithme 4.4, cet algorithme se termine après un nombre fini d'itérations.

Preuve :

Pour tout j assez grand on a $0 < l^j < u^j \leq \bar{t}$. Dès lors, puisqu'on itère entre le pas 3 et le pas 4 de l'algorithme 4.4, en utilisant un argument de monotonicité, on obtient ainsi que $l^j \to t^*$ et $u^j \to t^*$ pour un certain $t^* \in [0, \bar{t}]$ et de plus, on alterne respectivement entre les deux conditions

$$f(y_k(t_j)) > f(x_n) - m\delta_n^k(t_j) \tag{4.53}$$

$$\text{et} \quad f(y_k(t_j)) \leq f(x_n) - m\delta_n^k(t_j) \tag{4.63}$$

(voir construction de l'algorithme).
On obtient donc en passant à la limite dans les relations (4.53) et (4.63)

$$\lim_{j\to\infty} f(y_k(t_j)) - f(x_n) = -m \lim_{j\to\infty} \delta_n^k(t_j),$$

ou encore puisque f, y_k et donc δ_n^k sont des fonctions continues

$$f(y_k(t^*)) - f(x_n) = -m\delta_n^k(t^*). \tag{4.64}$$

Posons $j(1)$, $j(2)$ la sous-suite des indices pour lesquels (4.53) est vérifiée.

Comme $t_j \to t^*$ et $y_k(t)$ est continue, $y_k(t_{j(i)})$ est bornée.

Dès lors $g_{j(i)}\left(\in \partial f\left(y_k\left(t_{j(i)}\right)\right)\right)$ est bornée et admet une valeur d'adhérence g_*.

Puisque ∂f est une multi-application fermée (voir proposition IV.5 en annexe), on obtient

$$g_* \in \partial f(y_k(t^*)).$$

Donc , par définition du sous-différentiel

$$f(x_n) \geq f(y_k(t^*)) + < g_*, x_n - y_k(t^*) >.$$

En utilisant l'égalité (4.64) cela donne

$$-m\delta_n^k(t^*) \le < g_*, y_k(t^*) - x_n >.$$

De plus par hypothèse $-m > -m'$ (voir construction de l'algorithme 4.3) et comme d'autre part $\delta_n^k > 0$ (si ce n'était pas le cas, x_n serait optimal), on a

$$-m'\delta_n^k(t^*) < \; < g_*, y_k(t^*) - x_n >.$$

Un argument de continuité implique donc

$$< g_{j(i)}, y_k(t_{j(i)}) - x_n > \ge -m'\delta_n^k(t_j)$$

pour i assez grand.

L'algorithme 4.4 se termine donc avec un pas de descente.

□

Dans les autres cas (quand on passe uniquement dans le pas 3 ou dans le pas 4 de l'algorithme 4.4) nous n'arrivons pas à montrer que l'algorithme 4.4 se termine après un nombre fini d'itérations car tous les articles que nous avons consulté à ce sujet montrent que l'algorithme 4.4 se termine à la condition d'en sortir par le pas 3 si t devient trop grand, et par le pas 4 si t devient trop petit. Ils modifient donc les conditions de l'algorithme !
Par conséquent, dans ce cas on n'est pas sûr de sortir de l'algorithme 4.4 en ayant une matrice définie positive.

On ne peut donc pas utiliser les résultats de convergence de l'algorithme 4.1.
Toutefois, si on arrivait à montrer que l'algorithme 4.4 se termine en un nombre fini d'itérations, on aurait les résultats de convergence suivants.

Proposition 4.13

Si l'algorithme 4.3 génère une suite finie $\{x_1, \cdots x_n\}$ alors x_n est optimal.

Preuve :

Il suffit d'appliquer la proposition 4.1

Proposition 4.14

Soit	(x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme 4.3 avec la mise à jour fqN.
Si	$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\min}(M_n^{-1}) = +\infty$
et si	(x_n) est bornée,
alors	$f(x_n) \to \inf f(x)$ et
	toute valeur d'adhérence de (x_n) est un minimum de f.

Preuve :

C'est une application de la proposition 4.2

Proposition 4.15

i) Soit	(x_n) une suite infinie engendrée par l'algorithme 4.3 avec la mise à jour dqN,
alors	$f(x_n) \to \inf f(x)$.
ii) Si de plus	$\inf\{\mu_i\} = \overline{\mu} > 0$ et $\operatorname{argmin} f \neq 0$,
alors	$(x_n) \to \overline{x}$ min de f.

Preuve :

i) - Montrons d'abord que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$.

En effet, par la relation (4.46)

$$\mu_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{\|v\|^2}{<v,u>} & \text{si } <v,u> > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, en utilisant le caractère défini positif de M_n et le lemme 4.10 on obtient $\mu_{n+1} \leq \Lambda_n$ où Λ_n est la plus grande valeur propre de M_n.
Comme par ailleurs, dans la variante diagonale $M_n = \mu_n I$ l'inégalité $\mu_{n+1} \leq \Lambda_n$ se réduit à $\mu_{n+1} \leq \mu_n$.
$\left(\dfrac{1}{\mu_n}\right)$ est dès lors une suite croissante et par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = +\infty$.

- Appliquons ensuite la proposition 4.3. On obtient ainsi $f(x_n) \to \inf f$.
La première assertion du théorème est ainsi prouvée.

ii) Remarquons finalement que lorsque $\overline{\mu}$ est strictement positif et que f possède un minimum, il suffit d'appliquer la proposition 4.4 pour avoir que $x_n \to \overline{x}$ où $\overline{x}$ est un minimum de f.

□

4.2.5 Appendice : démonstration de la proposition 4.5

Proposition 4.5

Soit $z \in R^n$ tel qu'il existe $G \in \partial h(z)$.
Alors si $z_- = z + M^{-1}G$, on a
$$G = \nabla H(z_-).$$
De plus $p_h^M(z_-) = z$.

Preuve :

- Montrons en premier lieu que $z = p_h(z_-)$.

  Par hypothèse $z = z_- - M^{-1}G$ avec $G \in \partial h(z)$.
  Par conséquent par les relations (3.2) et (3.4) avec $M_n = M, x_{n+1} = z, x_n = z_-$ et $\gamma_n = G$, on en déduit par définition de p_h^M que $z = p_h^M(z_-)$.

- Montrons ensuite que $G = \nabla H(z_-)$.
  En utilisant le lemme 4.5 on obtient $\nabla H(z_-) = M(z_- - p_h^M(z_-))$.
  D'où, comme $z = p_h^M(z_-)$ on en déduit $\nabla H(z_-) = M(z_- - z)$.
  Or par définition de z_- on a $z_- = z + M^{-1}G$.
  Dès lors $\nabla H(z_-) = MM^{-1}G$ et par conséquent $\nabla H(z_-) = G$.

$\square$

2ème PARTIE : OPTIMISATION DE PROBLEMES AVEC CONTRAINTES

Après avoir étudié dans une première partie du mémoire différents algorithmes permettant de résoudre des problèmes d'optimisation sans contrainte, nous abordons les problèmes d'optimisation avec contraintes.

Dans le chapitre 5, nous nous ramènerons aux problèmes d'optimisation sans contrainte par pénalisation externe. Mais comme en procédant de la sorte on ne résout qu'une approximation du problème donné, au lieu d'appliquer telle quelle la méthode des faisceaux à cette pénalisation, on appliquera plutôt une version diagonale de cette méthode.

Dans le chapitre 6, nous nous intéresserons à un problème nouveau, à savoir la vitesse de convergence d'un algorithme.
A cette fin, nous étudierons deux algorithmes différents. Ces algorithmes ont en fait été étudiés par Maijian Qian qui lors de sa thèse a prouvé qu'ils convergeaient de manière superlinéaire.

CHAPITRE 5 : METHODES DE FAISCEAUX DIAGONALES EN OPTIMISATION CONVEXE

5.1 RAPPEL

Les méthodes des faisceaux sont des méthodes itératives de résolution numérique de problèmes d'optimisation convexe non différentiable et sans contrainte.
Une hypothèse essentielle pour leur convergence est que la fonction à optimiser soit partout finie.

5.2 INTRODUCTION

Lorsqu'il y a des contraintes, on peut toujours se ramener à ces méthodes faisceau par pénalisation. Mais en général, on ne résout ainsi qu'une approximation du problème donné. D'où l'idée de considérer une version diagonale d'une méthode des faisceaux en combinant la méthode de base avec une suite d'approximations partout finies de la fonction à optimiser, changeant l'approximation à chaque itération.
On se propose d'étudier la convergence d'un tel processus diagonal sous des hypothèses assez générales sur la suite d'approximations, englobant le cas de la pénalisation externe en programmation convexe.
La démarche repose sur le cadre des méthodes faisceaux exposées dans la première partie, mais ici, les matrices M_n intervenant dans la fonction objectif, $\varphi_k(y) + \frac{1}{2} < M_n(y - x_n), y - x_n >$ sont proportionnelles à la matrice identité : $M_n = \frac{1}{t_n} I$.

Toutefois, l'étude de ces méthodes faisceaux diagonales, nécessite la connaissance d'une version diagonale inexacte de la méthode proximale. Celle-ci nous permettra de disposer des outils nécessaires pour étudier la version diagonale des méthodes faisceaux. Cette version diagonale inexacte de la méthode proximale fera l'objet du paragraphe 5.3.

Ensuite, à la section 5.4 nous reviendrons à l'algorithme général des faisceaux et nous proposerons une variante de cet algorithme.

La section 5.5 sera enfin consacrée à l'étude de la version diagonale des méthodes faisceaux.

Finalement, nous terminerons ce chapitre en couplant dans le paragraphe 5.6 la version diagonale des méthodes faisceaux avec les méthodes de pénalisation externe.

5.3 UNE VERSION DIAGONALE INEXACTE DE LA METHODE PROXIMALE

Soient $f^n : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ des fonctions convexes, propres et semi-continues inférieurement pour n=1, 2, ...

$t_n > 0,$

$\varepsilon_n \geq 0,$

$x_1 \in R^n.$

La version diagonale inexacte de la méthode proximale définit la suite (x_n) par récurrence de la façon suivante

$$x_n \in \left(I + t_n \partial_{\varepsilon_n} f^n\right)^{-1}(x_{n-1}) \quad \text{pour } n = 2, \cdots$$

ou encore

$$\frac{x_{n-1} - x_n}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n} f^n(x_n) \quad \text{pour } n = 2, \cdots. \tag{5.1}$$

Pour établir la convergence de cet algorithme, deux lemmes sont nécessaires.

Lemme 5.1

Pour tout a, b et $x \in R^n$ on a
$2 < a - b, x - b > = \|a - b\|^2 + \|x - b\|^2 - \|x - a\|^2.$

Preuve :

Décomposons la norme de x-a en fonction de celle de x-b et de celle de b-a.
On obtient ainsi

$$\begin{aligned}\|x - a\|^2 &= \|(x - b) + (b - a)\|^2 \\ &= \|(x - b)\|^2 + \|a - b\|^2 - 2 < x - b, a - b >.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2 < a - b, x - b > = \|a - b\|^2 + \|x - b\|^2 - \|x - a\|^2$$

□

Lemme 5.2

Soient (t_n) une suite de réels strictement positifs,
(α_n) une suite convergente de réels.
Si on pose

$$b_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \alpha_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty.$$

(admis).

Les lemmes précédents nous permettent dès à présent d'établir les théorèmes de convergence de la version diagonale inexacte de la méthode proximale.

Proposition 5.1

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale inexacte de la méthode proximale.
On suppose qu'il existe une fonction propre $g : R^n \to \overline{R}$
telle que

- $\forall n,\ \ f^n \leq g \quad ou \quad \forall n \ dom\, g \subseteq dom\, f^n \ et \ f^n \overset{simpl}{\to} g,$ (5.2)
- $\inf_{R^n} g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(\inf f^n),$ (5.3)
- $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty,$ (5.4)
- $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$ (5.5)

Dans ce cas

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f^n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k f^k(x_k)}{\sum_{k=1}^{n} t_k} = \inf_{R^n} g.$$

Preuve :

On a, d'après le schéma (5.1) que pour tout $k \in N$

$$\frac{x_{k-1} - x_k}{t_k} \in \partial_{\varepsilon_k} f^k(x_k).$$

D'où, par définition du ε_k-sous-différentiel, on obtient

$$\forall x \in R^n \quad f^k(x) \geq f^k(x_k) + < \frac{x_{k-1} - x_k}{t_k}, x - x_k > -\varepsilon_k$$

et donc (puisque $t_k > 0$)

$$2t_k f^k(x) \geq 2t_k f^k(x_k) + 2 < x_{k-1} - x_k, x - x_k > -2t_k \varepsilon_k.$$

En vertu du lemme 5.1, on en déduit pour tout $x \in R^n$ que

$$2t_k f^k(x) \geq 2t_k f^k(x_k) + \|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2 - 2t_k \varepsilon_k,$$

ou encore

$$t_k f^k(x) \geq t_k f^k(x_k) + \frac{1}{2}\|x_{k-1} - x_k\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 - \frac{1}{2}\|x - x_{k-1}\|^2 - t_k \varepsilon_k.$$

En sommant de k allant de 1 à n, on obtient finalement

$$\forall x \in R^n \quad \sum_{k=1}^n t_k f^k(x) \geq \sum_{k=1}^n t_k f^k(x_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \|x_{k-1} - x_k\|^2 + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 - \frac{1}{2}\|x - x_{k-1}\|^2$$
$$-\sum_{k=1}^n t_k \varepsilon_k. \tag{5.6}$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^n \|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2$$
$$= \|x_0 - x_1\|^2 + \|x - x_1\|^2 - \|x - x_0\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 + \|x - x_2\|^2 - \|x - x_1\|^2$$
$$+\|x_2 - x_3\|^2 + \|x - x_3\|^2 - \|x - x_2\|^2 + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2 - \|x - x_{n-1}\|^2.$$

Après simplification, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2$$
$$= \|x_0 - x_1\|^2 - \|x - x_0\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 + \|x_2 - x_3\|^2 + \cdots + \|x_{n-1} - x_n\|^2 + \|x - x_n\|^2.$$

D'où, en utilisant le fait que le carré d'une norme est toujours positif, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2 \geq -\|x - x_0\|^2.$$

Par conséquent, la relation (5.6) devient pour tout $x \in R^n$

$$\sum_{k=1}^n t_k f^k(x) \geq \sum_{k=1}^n t_k f^k(x_k) - \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 - \sum_{k=1}^n t_k \varepsilon_k.$$

En divisant par $\sigma_n = \sum_{k=1}^n t_k$, on en déduit pour tout $x \in R^n$ (puisque $\sigma_n > 0$)

$$\frac{\sum_{k=1}^n t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n t_k f^k(x)}{\sigma_n} + \frac{\|x - x_0\|^2}{2\sigma_n} + \frac{\sum_{k=1}^n t_k \varepsilon_k}{\sigma_n}. \tag{5.7}$$

Par ailleurs on sait par définition de la borne inférieure que $\inf_x f^n(x) \leq f^n(x_n)$.

Il résulte donc par passage à la limite que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \inf_x f^n(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n)$. (5.8)

On déduit ainsi de l'hypothèse (5.3) que

$$\inf g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n). \tag{5.9}$$

Or en appliquant le lemme 5.2, puisque par hypothèse $\sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$ on obtient

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n}. \tag{5.10}$$

Par conséquent, l'inégalité (5.9) peut se réécrire comme suit

$$\inf g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n}.$$

En tenant compte de l'inégalité (5.7) on en déduit finalement que

$$\inf g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x)}{\sigma_n} + \frac{\|x - x_0\|^2}{2\sigma_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k \varepsilon_k}{\sigma_n}. \tag{5.11}$$

Or en utilisant la définition de σ_n et l'hypothèse (5.4) on sait que $\sigma_n \to \infty$.

Par conséquent $\dfrac{\|x - x_0\|^2}{\sigma_n} \to 0$ et en appliquant de nouveau le lemme 5.2 mais à la sous-suite de ε_n qui converge vers la plus grande valeur d'adhérence de cette suite, on a

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \varepsilon_k}{\sigma_n} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_n. \tag{5.12}$$

Or comme par l'hypothèse (5.5) on sait que ε_n tend vers 0, la relation (5.12) se réduit à

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k \varepsilon_k}{\sigma_n} = 0.$$

L'inégalité (5.11) devient donc

$$\inf g \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x)}{\sigma_n}. \tag{5.13}$$

Il reste encore à utiliser l'hypothèse (5.2).

- Supposons dans un premier temps que pour tout n $f^n \leq g$.

  Dans ce cas, il est évident que $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{t_k f^k(x)}{\sigma_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} t_k g(x)}{\sigma_n} = g(x)$.

- Supposons dans un second temps que pour tout n dom $g \subseteq$ dom f^n et que f^n tende simplement vers g.
  Sous cette hypothèse $\forall x \in dom\, g : f^n(x) < \infty \quad et \quad f^n(x) \to g(x)$.
  D'où par le lemme 5.2

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k f^k(x)}{\sigma_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} f^n(x) = g(x).$$

On en déduit donc dans chacun de ces deux cas que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k f^k(x)}{\sigma_n} \le g(x).$$

Par conséquent, on peut réécrire l'inégalité (5.13) de la manière suivante

$$\forall x \in dom\, g \;\; \inf g \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} \le g(x)$$

ou encore $\forall x \in dom\, g \quad \inf g \le g(x)$.

On en déduit alors par définition de la borne inférieure que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} = \inf g.$$

En combinant ce résultat avec le lemme 5.2 en utilisant la sous-suite de $\left(f^n(x_n)\right)$ qui converge vers la plus petite valeur d'adhérence de cette suite, on obtient que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k f^k(x_k)}{\sigma_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} f^n(x_n).$$

□

Voici maintenant un résultat qui nous servira à établir la seconde proposition de convergence.

Lemme 5.3

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale inexacte de la méthode proximale.
Supposons que :

(f^n) est croissante,

$f = \sup_n f^n$,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(\inf f^n) \ge \inf f, \tag{5.14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty, \tag{5.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{5.16}$$

Alors

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f^n(x_n) = \inf f.$$

Preuve :

Il suffit de poser $g = f$ et de vérifier que toutes les hypothèses du lemme précédent sont vérifiées.

- Montrons d'abord que l'hypothèse (5.2) est satisfaite.

  On a posé $g = f$ et par hypothèse $f = \sup_n f^n$.

  On a donc $g = f = \sup_n f^n$. Par conséquent

  $f^n \leq g \quad \forall n.$

- Vérifions ensuite que l'hypothèse (5.3) est satisfaite.

  Par hypothèse $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\inf f^n) \geq \inf f$.

  Dès lors, en prenant $f = g$ on obtient $\underline{\lim}_{n\to\infty}(\inf f^n) \geq \inf g$.

- Remarquons ensuite que les hypothèses (5.4) et (5.5) sont vérifiées grâce aux hypothèses (5.15) et (5.16).

□

Proposition 5.2

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale inexacte de la méthode proximale.
Supposons que

$$\operatorname{Argmin} f \neq \varnothing,$$

$$(f^n) \text{ croissante et } f = \sup_n f^n, \tag{5.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\inf f - \inf f^n) < \infty, \tag{5.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \tag{5.19}$$

$$0 < \underline{t} \leq t_n \leq \bar{t} < \infty. \tag{5.20}$$

Alors

$$f^n(x_n) \to \inf f \quad \text{et} \quad x_n \to \bar{x} \in \operatorname{Argmin} f.$$

Preuve :

voir appendice (§5.7).

Après avoir étudié la convergence de la version diagonale inexacte de la méthode proximale, nous allons maintenant coupler cette méthode avec une variante de la méthode générale des faisceaux.

5.4 VARIANTE DE L'ALGORITHME GENERAL DES FAISCEAUX

Dans l'étude de la convergence de l'algorithme des faisceaux, on a constaté que lorsque la suite $\{x_1, \cdots x_n\}$ engendrée par l'algorithme des faisceaux était finie, alors x_n était optimal. Cependant, la suite engendrée par cet algorithme n'est finie que lorsqu'on ne vérifie jamais le test de descente après x_n.
Par conséquent, pour être sûr que la suite que l'on engendre est finie, il faut poursuivre indéfiniment le calcul $y_k = \text{argmin}\, \varphi_k(y) + \frac{1}{2t_n} < y - x_n, y - x_n >$ et voir que ce point ne vérifie jamais le test de descente.
Cela est évidemment impossible à vérifier numériquement car il est impossible de poursuivre indéfiniment le calcul de y_k.

Nous proposons donc une variante permettant d'éviter cet inconvénient.

Variante

Comme en poursuivant indéfiniment le calcul de y_k on a pour tout n

$$0 \leq f(y_k) - \varphi_k(y_k) \to 0$$

(voir démonstration de la proposition 4.1).
On propose donc d'arrêter ce calcul et de définir $k(n-1)$(itération où x_{n-1} est mis à jour) comme le premier entier $k \geq 0$ tel que

$$f(y_k) - \varphi_k(y_k) \leq \alpha_n.$$

Proposition 5.3

$$\boxed{\frac{x_{n-1} - x_n}{t_n} \in \partial_{\alpha_n} f(x_n)}$$

Preuve :

Par construction de l'algorithme général des faisceaux

$$\frac{x_{n-1} - y_{k(n-1)}}{t_{n-1}} \in \partial f(y_{k(n-1)}).$$

Par la définition d'inégalité du sous-différentiel, on a

$$\forall y \quad f(y) \geq f(y_{k(n-1)}) + < \frac{x_{n-1} - y_{k(n-1)}}{t_{n-1}}, y - y_{k(n-1)} >.$$

De plus, comme on met à jour x_{n-1} à l'itération $k(n-1)$ on a $y_{k(n-1)} = x_n$ et donc

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_{n-1}}, y - x_n >.$$

Or par le choix du faisceau, f est supérieur à $\varphi_{k(n-1)}$.
Par conséquent

$$\forall y \quad f(y) \geq \varphi_{k(n-1)}(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_{n-1}}, y - x_n >,$$

ou encore

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) - f(x_n) + \varphi_{k(n-1)}(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_{n-1}}, y - x_n >.$$

On a donc puisque $f(x_n) - \varphi_{k(n-1)}(x_n) \leq \alpha_n$

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_{n-1}}, y - x_n > -\alpha_n.$$

Or sans perdre de généralité on peut supposer $t_n = t_{n-1}$ (il suffit de décaler tous les indices d'une unité vers la droite).
D'où

$$\forall y \quad f(y) \geq f(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_n}, y - x_n > -\alpha_n.$$

Par conséquent

$$\frac{x_{n-1} - x_n}{t_n} \in \partial_{\alpha_n} f(x_n).$$

□

La proposition précédente nous permet en prenant $f = f^n$ pour tout n dans le cadre de la version diagonale inexacte de la méthode proximale (voir §5.3) de déduire le théorème suivant.

Proposition 5.4

Soit (x_n) une suite engendrée par la variante de l'algorithme général des faisceaux.
Supposons que

$$dom\, f = R^n,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} t_n = +\infty,$$
$$\alpha_n \to 0.$$

Dans ce cas $\underline{\lim}_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf f$.

Si de plus $0 < \underline{t} \leq t_n \leq \bar{t} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ et argmin $f \neq \emptyset$,

alors $f(x_n) \to \inf f$ et $x_n \to \bar{x} \in$ Argmin f.

Preuve :

En posant $f = f^n$ les hypothèses des propositions 5.1 et 5.2 sont trivialement vérifiées avec $f = g$ et $\alpha_n = \varepsilon_n$. Par conséquent, on sait par la proposition 5.1 que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) = \inf f$$

et par la proposition 5.2 que

$$f(x_n) \to \inf f \quad \text{et} \quad x_n \to \bar{x} \in \operatorname{Argmin} f .$$

□

5.5 VERSION DIAGONALE DE LA METHODE DES FAISCEAUX

Remplaçons f par f^n dans la variante de la méthode générale des faisceaux.

On a donc $\dfrac{x_{n-1} - x_n}{t_n} \in \partial_{\alpha_n} f^n(x_n)$.

On peut en déduire comme conséquence immédiate des propositions 5.1 et 5.2 les résultats suivants.

Proposition 5.5

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale de la méthode des faisceaux.
On suppose qu'il existe une fonction $g : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ propre telle que

$$\forall n \quad f^n \le g \quad ou \quad \operatorname{dom} f^n \subseteq \operatorname{dom} g \quad \text{et} \quad f^n \xrightarrow{\text{simpl.}} g,$$

$$\inf g \le \underline{\lim}_{n\to\infty} (\inf f^n),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

Dans ce cas

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) = \inf g .$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la proposition 5.1 en prenant $\alpha_n = \varepsilon_n$.

Proposition 5.6

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale de la méthode des faisceaux.
Supposons que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Argmin} f \neq \varnothing,\\
&(f^n) \text{ croissante et } f = \sup_n f^n,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}(\inf f - \inf f^n) < \infty,\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < \infty,\\
&0 < \underline{t} \leq t_n \leq \bar{t} < \infty.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&f^n(x_n) \to \inf f \quad \text{et}\\
&x_n \to \bar{x} \in \operatorname{Argmin} f.
\end{aligned}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la proposition 5.2 en prenant $\alpha_n = \varepsilon_n$.

La dernière section de ce chapitre situera la pénalisation externe en programmation convexe dans le cadre de la version diagonale et de la méthode des faisceaux.

5.6 VERSION DIAGONALE ET PENALISATION EXTERNE

Lorsque l'on doit résoudre un problème d'optimisation avec contraintes

$$\begin{aligned}
&\min f_0(x)\\
&\text{s.c. } x \in C
\end{aligned}$$

où $f_0 : R^n \to R$ est une fonction convexe continue, et C est un ensemble convexe non vide fermé, on peut toujours se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte par pénalisation externe.

Le problème que l'on considère est alors le suivant :

$$\min f_0(x) + \phi^n(x)$$

où $\phi^n : R^n \to R$ sont des fonctions convexes et continues qui vérifient

$$\phi^n(x) \le \phi^{n+1}(x), \quad \forall x \in R^n \quad \forall n \in N \tag{5.21}$$

$$\phi^n(x) = 0, \quad \text{si } x \in C \tag{5.22}$$

$$0 < \phi^n(x) \to +\infty, \quad \text{si } x \notin C. \tag{5.23}$$

Mais en général, en résolvant ce problème on ne résout qu'une approximation du problème de départ ! D'où l'idée de considérer une version diagonale de la variante de la méthode générale des faisceaux en prenant $f^n = f_0 + \phi^n$.

On a alors le résultat suivant.

Proposition 5.7

Soient $f^n = f_0 + \phi^n$ et $f = f_0 + \Psi_C$ où Ψ_C est la fonction indicatrice de l'ensemble C.

Alors

i) $\forall n$, (f^n) est une fonction partout finie,

ii) (f^n) est croissante,

iii) $f = \sup_n f^n$.

Pour rappel, la fonction indicatrice Ψ_C de l'ensemble C est défini par la fonction

$$\Psi_C : R^n \to R \cup \{+\infty\}$$

$$x \to \Psi_C(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in C$$

$$= +\infty \quad \text{si} \quad x \notin C.$$

Preuve :

i) Comme ϕ^n et f_0 sont par hypothèse deux fonctions à valeur dans R, $f_0 + \phi^n$ l'est aussi. Or par définition $f^n = f_0 + \phi^n$,
f^n est donc une fonction partout finie.

ii) Comme par l'hypothèse (5.21) $\phi^n(x) \leq \phi^{n+1}(x) \quad \forall x \in R^n, \quad \forall n \in N$;
on sait que (ϕ^n) est une suite croissante.
Par conséquent $f^n = f_0 + \phi^n$ est aussi une suite croissante.

iii) - Montrons d'abord que $\forall x \in C \quad f(x) = \sup_n f^n(x)$.

Soit $x \in C$.

Par définition de la fonction indicatrice de C et par l'hypothèse (5.22) on sait que $\Psi_C(x) = \phi^n(x) = 0$. Dès lors

$$f_0(x) + \Psi_C(x) = f_0(x) + \phi^n(x),$$

et donc

$$f(x) = f^n(x).$$

On en déduit donc que

$$f(x) = \sup_n f^n(x).$$

- Montrons ensuite que $\forall x \notin C \quad f(x) = \sup_n f^n(x)$.

Soit $x \notin C$, en vertu de l'hypothèse (5.23) et de la définition de Ψ_C on a $\phi^n(x) \to \Psi_C(x)$. Dès lors,

$$f_0(x) + \phi^n(x) \to f_0(x) + \Psi_C(x),$$

ou encore par définition de f^n et de f

$$f^n(x) \to f(x),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = f(x).$$

De plus, comme (f^n) est une suite croissante, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \sup_n f^n(x).$$

Par conséquent,

$$\sup_n f^n(x) = f(x).$$

□

Posons plus particulièrement $C=\{x \in R^n \quad tq \quad f_i(x) \leq 0 \quad i=1,\cdots,m\}$ où les fonctions f_i sont des fonctions convexes, continues et intéressons-nous à deux cas particuliers de fonctions ϕ^n (pénalité linéaire et quadratique).

5.6.1 Pénalité linéaire

Soit (r_n) une suite de réels positifs qui croît vers $+\infty$.
Posons $\phi^n = \phi_L^n$ où

$$\phi_L^n(x) = r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x) \quad \text{et} \quad (f_i)^+(x) = f_i(x) \quad \text{si } f_i(x) \geq 0$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

et vérifions que la suite (ϕ_L^n) satisfait les hypothèses (5.21), (5.22) et (5.23).

- Montrons d'abord que l'hypothèse (5.21) est vérifiée.
  Par définition $\phi_L^n(x) = r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x)$. On en déduit donc en utilisant le caractère croissant de la suite (r_n) que

$$\phi_L^n(x) \leq r_{n+1} \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x),$$

  ou encore par définition de $\phi_L^{n+1}(x)$

$$\phi_L^n(x) \leq \phi_L^{n+1}(x).$$

- Ensuite vérifions que l'hypothèse (5.22) est satisfaite.
  Par définition de ϕ_L^n et de $(f_i)^+$ on a

$$\phi_L^n(x) = r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x)$$

  Par conséquent $\phi_L^n(x) = 0$ si $f_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\}$, c'est-à-dire puisque $C = \{x \in R^n \quad tq \quad f_i(x) \leq 0 \quad i = 1,\cdots,m\}$

$$\phi_L^n(x) = 0 \; si \; x \in C.$$

- Il reste finalement à vérifier si l'hypothèse (5.23) est satisfaite.
  Soit $x \notin C$, par définition de C, $\exists i \in \{1,\cdots m\}$ tel que $(f_i)^+(x) = f_i(x) > 0$.
  Par conséquent, comme $(f_i)^+(x) \geq 0 \quad \forall j \in \{1,\cdots,m\}$ on a

$$r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x) > 0$$

  ou encore

$$\phi_L^n(x) > 0.$$

De plus comme $(r_n) \to \infty$ on a

$$\phi_L^n(x) = r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x) \to +\infty.$$

□

Etablissons le théorème suivant.

Proposition 5.8

Supposons que la condition de Slater soit vérifiée ,c'est-à-dire

$$\exists \overline{x} \in R^n \quad tq \quad f_i(\overline{x}) < 0 \quad \forall i = 1, \cdots m$$

et Argmin $f \neq \emptyset$.

Dans ce cas, $\inf f = \inf f_L^n$ pour tout n assez grand où $f_L^n = f_0 + \phi_L^n$.

Preuve :

Soit $\overline{x} \in$ Argmin f. Puisque la condition de Slater est vérifiée, il existe des multiplicateurs de Kuhn Tucker $\overline{\lambda_i} \geq 0$ tels que (voir proposition V.6 en annexe)

$$\overline{\lambda_i} f_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, m \quad \text{et} \quad \forall x \in R^n \quad f_0(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} f_i(\overline{x}) \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} f_i(x).$$

Comme de plus $\overline{\lambda_i} f_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, m$ et $\overline{x} \in$ argmin f, on peut affirmer que

$$\forall x \in R^n \quad f_0(\overline{x}) = \inf f \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} f_i(x)$$

et donc par définition de la borne supérieure et de $(f_i)^+$

$$\inf f \leq f_0(x) + \sup_{1 \leq i \leq m} \overline{\lambda_i} \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x). \tag{5.24}$$

Par ailleurs, comme la suite (r_n) tend vers l'infini, r_n peut devenir aussi grand que l'on veut pourvu que n soit assez grand. De la relation (5.24), il en résulte que pour tout n assez grand

$$\begin{aligned} \inf f &\leq f_0(x) + r_n \sum_{i=1}^{m} (f_i)^+(x) \\ &= f_0(x) + \phi_L^n(x) \\ &= f_L^n(x). \end{aligned}$$

Dès lors, par définition de la borne inférieure d'une fonction

$$\inf f \leq \inf f_L^n.$$

Par ailleurs, par la proposition 5.7 $\quad f = \sup_n f_L^n$, et par conséquent $\inf f \geq \inf f_L^n$.

Il découle des deux inégalités précédentes que $\inf f = \inf f_L^n$.

□

Les hypothèses $\sum_{n=1}^{\infty}(\inf f - \inf f^n) < \infty$ *et* $\inf f \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf f^n$ des propositions 5.5 et 5.6 sont vérifiées. Par conséquent, en couplant la méthode diagonale avec la pénalisation externe, on obtient les deux résultats de convergence suivants.

<u>Proposition 5.9</u>

> Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale de la méthode des faisceaux avec $f^n = f_L^n$.
>
> i) Supposons que
> - $\text{Argmin} f \neq \emptyset$,
> - $\exists \bar{x} \in R^n \quad tq \quad f_i(\bar{x}) < 0 \quad \forall i = 1 \cdots m,$
> - $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty,$
> - $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$
>
> Alors $\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) = \inf f$.
>
> ii) Si de plus
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$
> $$0 < \underline{t} \leq t_n \leq \bar{t} < \infty$$
>
> alors
>
> $$f^n(x_n) \to \inf f$$
> $$\text{et} \quad x_n \to x^* \in \text{Argmin} f.$$

<u>Preuve</u> :

Cette proposition découle des propositions 5.5, 5.6, 5.7 et 5.8.

En effet, par la proposition 5.7 $\forall n \;\; f^n \leq f$ et par la proposition 5.8 $\inf f \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf f^n$.
Par conséquent on peut appliquer le théorème 5.5 puisque toutes les hypothèses de ce théorème sont vérifiées. De même, on peut appliquer le théorème 5.6 puisque toutes les hypothèses de ce théorème sont également vérifiées grâce aux propositions 5.7 et 5.8.
□

Passons à l'étude de la pénalité quadratique.

<u>5.6.2 Pénalité quadratique</u>

Soit (r_n) une suite de réels positifs qui croît vers $+\infty$.

Posons $\phi^n = \phi_Q^n = \frac{r_n}{2} \sum_{i=1}^{m} \left((f_i)^+\right)^2$.

Notons que ici aussi ϕ_Q^n vérifie les hypothèses voulues sur les fonctions ϕ^n.

- Montrons d'abord que l'hypothèse (5.21) est satisfaite.

  Par définition $\phi_Q^n(x) = \frac{r_n}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)^+\right)^2(x)$. Par conséquent, puisque par hypothèse la suite (r_n) est croissante, on en déduit que

$$\phi_Q^n(x) \le \frac{r_{n+1}}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)^+\right)^2(x).$$

  Il en résulte donc de la définition de $\phi_Q^{n+1}(x)$ que $\phi_Q^n(x) \le \phi_Q^{n+1}(x)$.

- Vérifions ensuite que l'hypothèse (5.22) est satisfaite.

  Par définition de ϕ_Q^n et des fonctions $(f_i)^+$, on a

$$\phi_Q^n(x) = \frac{r_n}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(f_i\right)^{+2}(x).$$

  Par conséquent, $\phi_Q^n(x) = 0$ si $f_i(x) \le 0 \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\}$ ou encore par définition de C $\quad \phi_Q^n(x) = 0$ si $x \in C$.

- Essayons ensuite de vérifier que l'hypothèse (5.23) est satisfaite.

  Soit $x \notin C$.

  Par définition de C $\exists i \in \{1,\cdots,m\}$ tel que $(f_i)^+(x) = f_i(x) > 0$.

  Par conséquent, comme $\left(\left(f_j\right)^+\right)^2(x) \ge 0 \quad \forall j \in \{1,\cdots,m\}$ on a

$$\phi_Q^n(x) = \frac{r_n}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)^+\right)^2(x) > 0.$$

  De plus, comme $r_n \to \infty$

$$\phi_Q^n(x) = \frac{r_n}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)^+\right)^2(x) \to \infty.$$

$\square$

Dans le cas de la pénalité linéaire, on a montré que $\inf f = \inf f_L^n$.
Ici, le résultat que l'on obtiendra sera un peu moins précis : cette égalité ne sera seulement vérifiée qu'à un $O\left(\frac{1}{r_n}\right)$ près (voir proposition 5.10 ci-après).

Par conséquent les hypothèses $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf f - \inf f^n\right) < \infty$ et $\inf f \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\inf f^n\right)$ ne seront plus, comme c'était le cas dans la pénalité linéaire, toujours vérifiées.
Il faudra pour cela que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}$ soit convergente.

Proposition 5.10

Supposons que la condition de Slater soit satisfaite :

$$\exists \bar{x} \in R^n \quad tq \quad f_i(\bar{x}) < 0 \quad \forall i = 1, \cdots, m$$

et Argmin $f \neq \varnothing$.

Alors $\inf f - \inf f_Q^n = O\left(\frac{1}{r_n}\right)$ où $f_Q^n = f_0 + \phi_Q^n$.

Preuve :

Soit $\bar{x} \in$ Argmin f. Puisque la condition de Slater est vérifiée, il existe des multiplicateurs de Kuhn-Tucker $\overline{\lambda_i} \geq 0$ tels que (voir démonstration de la proposition 5.8)

$$\forall x \in R^n \quad \inf f = f_0(\bar{x}) \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} f_i(x).$$

Comme d'autre part, il est assez évident d'après la définition de $(f_i)^+$ que $f_i \leq (f_i)^+$, on en déduit que

$$\forall x \in R^n \quad \inf f = f_0(\bar{x}) \leq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} (f_i)^+(x) \tag{5.25}$$

Par ailleurs

$$\left(\frac{a}{\sqrt{r_n}} - \sqrt{r_n} b\right)^2 \geq 0.$$

On a donc

$$\frac{a^2}{r_n} + r_n b^2 \geq 2ab,$$

c'est-à-dire

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r_n} + b^2 r_n\right).$$

En prenant $a = \overline{\lambda_i}$ et $b = (f_i)^+(x)$, on obtient ainsi

$$\overline{\lambda_i}(f_i)^+(x) \leq \frac{1}{2r_n}\left(\overline{\lambda_i}\right)^2 + \frac{r_n}{2}\left((f_i)^+\right)^2(x).$$

Par conséquent l'inégalité (5.25) devient

$$\forall x \in R^n \quad \inf f \leq f_0(x) + \frac{1}{2r_n}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\lambda_i}\right)^2 + \frac{r_n}{2}\sum_{i=1}^{m}\left((f_i)^+\right)^2(x).$$

En utilisant la définition de $\phi_Q^n(x)$ et de $f_Q^n(x)$, on en déduit que

$$\forall x \in R^n \quad \inf f \leq \frac{1}{2r_n}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\lambda_i}\right)^2 + f_Q^n(x).$$

Dès lors par définition de la borne inférieure,

$$\forall x \in R^n \quad \inf f - \frac{1}{2r_n}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\lambda_i}\right)^2 \leq \inf f_Q^n,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\inf f - \inf f_Q^n &\le \frac{1}{2r_n}\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{\lambda_i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{\left(\lambda_i\right)}^2\right)\frac{1}{r_n}.\end{aligned}$$

□

On peut donc résumer les résultats précédents en énonçant la proposition suivante. Celle-ci concerne la convergence de l'algorithme obtenu en couplant la méthode diagonale avec la pénalisation externe.

Proposition 5.11

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale de la méthode des faisceaux avec $f^n = f_Q^n$.

i) Supposons que

$$\operatorname{Argmin} f \neq \emptyset,$$

$$\exists \bar{x} \in R^n \quad tq \quad f_i(\bar{x}) < 0 \quad i = 1, \cdots, m,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors $\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) = \inf f$.

ii) Si de plus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty,$$

$$0 < \underline{t} \le t_n \le \bar{t} < \infty,$$

alors $f^n(x_n) \to \inf f \quad et \quad x_n \to \bar{x} \in \operatorname{Argmin} f$.

Preuve :

Il suffit de montrer que les hypothèses des propositions 5.5 et 5.6 sont vérifiées ; auquel cas, en appliquant ces propositions, on obtient directement la thèse.
De plus, grâce à la proposition 5.7, pour être certain que toutes les hypothèses de ces propositions sont vérifiées, il suffit de montrer que $\inf f \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \inf\left(f_Q^n\right)$ (5.26)

et $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf f - \inf f_Q^n\right) < \infty$. (5.27)

En appliquant la proposition 5.10 on sait que $\inf f - \inf f_Q^n = O\left(\frac{1}{r_n}\right)$. Par conséquent, puisque par hypothèse $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n} < \infty$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf f - \inf f_Q^n\right) < \infty.$$

On a ainsi obtenu la relation (5.27).

Il reste encore à vérifier la relation (5.26).

Or on vient de conclure que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf f - \inf f_Q^n\right) < \infty$.

Par ailleurs, on sait que le terme général d'une série qui converge tend vers zéro. Dès lors, on en déduit que

$$\inf f - \underline{\lim}_{n \to \infty} \inf f_Q^n = 0$$

c'est-à-dire

$$\inf f = \underline{\lim}_{n \to \infty} \inf f_Q^n,$$

ou encore

$$\inf f \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \inf f_Q^n.$$

□

5.7 APPENDICE : DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2

Soit (x_n) une suite engendrée par la version diagonale inexacte de la méthode proximale. Supposons que

$$\operatorname{Argmin} f \neq \varnothing,$$

$$(f^n) \text{ croissante et } f = \sup_n f^n, \tag{5.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf f - \inf f^n\right) < \infty, \tag{5.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \tag{5.19}$$

$$0 < \underline{t} \leq t_n \leq \bar{t} < \infty. \tag{5.20}$$

Alors

$$f^n(x_n) \to \inf f \quad \text{et} \quad (x_n) \quad \text{converge vers } \bar{x} \in \operatorname{Argmin} f.$$

Preuve :

1. ***Montrons d'abord que*** $f^n(x_n) \to \inf_{R^n} f$.

Pour cela nous procéderons en deux étapes :

Dans un premier temps, prouver que la suite (x_n) est bornée et que $\|x_{n-1} - x_n\| \to 0$ (voir point 1.1 de la démonstration).

Après cela, essayer d'en déduire que $f^n(x_n) \to \inf_{R^n} f$ (voir point 1.2 de la démonstration).

1.1 ***Montrons d'abord que*** (x_n) ***est bornée et que*** $\|x_{n-1} - x_n\| \to 0$.

D'après le schéma (5.1)

$$\frac{x_{k-1} - x_k}{t_k} \in \partial_{\varepsilon_k} f^k(x_k).$$

D'où par la propriété d'inégalité du ε_k - sous-différentiel on a

$$\forall x \in R^n \quad f^k(x) \geq f^k(x_k) + \frac{1}{t_k} < x_{k-1} - x_k, x - x_k > -\varepsilon_k.$$

Or en vertu du lemme 5.1

$$< x_{k-1} - x_k, x - x_k > = \frac{1}{2}\left\{\|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2\right\}$$

et donc (puisque t_k >0)

$$\forall x \in R^n \quad f^k(x) \geq f^k(x_k) + \frac{1}{2t_k}\left\{\|x_{k-1} - x_k\|^2 + \|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2\right\} - \varepsilon_k,$$

ou encore

$$\forall x \in R^n \quad \|x_k - x\|^2 \leq \|x_{k-1} - x\|^2 - \|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2t_k\left[f^k(x) - f^k(x_k) + \varepsilon_k\right].$$

En utilisant l'hypothèse (5.17) on en déduit

$$\forall x \in R^n \quad \|x_k - x\|^2 \leq \|x_{k-1} - x\|^2 - \|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2t_k\left[f(x) - f^k(x_k) + \varepsilon_k\right]$$

et donc, comme pour tout $x \in \text{Argmin } f$ $\quad f(x) = \inf f$ il en résulte que

$$\forall x \in \text{Argmin } f : \quad \|x_k - x\|^2 \leq \|x_{k-1} - x\|^2 - \|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2t_k\left[\inf f - f^k(x_k) + \varepsilon_k\right].$$

D'où comme $-f^k(x_k) \leq -\inf f^k$, on obtient

$$\forall x \in \text{Argmin } f : \quad \|x_k - x\|^2 \leq \|x_{k-1} - x\|^2 - \|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2t_k\left[\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right].$$

En sommant de $k = 1$ à n pour tout $x \in \operatorname{Argmin} f$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_k - x\|^2 \le \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_k - x\|^2 \le \sum_{k=0}^{n-1}\|x_k - x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\|x_k - x\|^2 + \|x_n - x\|^2 \le \|x_0 - x\|^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\|x_k - x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right)$$

ou encore après simplification

$$\|x_n - x\|^2 \le \|x_0 - x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right) \qquad (5.28)$$

Par conséquent, par tout $x \in \operatorname{Argmin} f$ on a

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 \le \|x_n - x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 \le 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right) + \|x_0 - x\|^2 .$$

Comme par ailleurs $t_k \le \bar{t}$, il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 \le \|x_n - x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 \le 2\bar{t}\sum_{k=1}^{n}\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right) + \|x_0 - x\|^2 .$$

En utilisant les hypothèses (5.18) et (5.19) on obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{k-1} - x_k\|^2 < \infty.$$

Du fait que le terme général d'une série convergente tend vers zéro, on en déduit que $\|x_{n-1} - x_n\| \to 0$.

Par ailleurs, par l'inégalité (5.28) on a

$$\|x_n - x\|^2 \le \|x_0 - x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|x_{k-1} - x_k\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right).$$

Par conséquent, puisque $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{k-1} - x_k\|^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\left(\inf f - \inf f^k + \varepsilon_k\right)$ sont deux séries convergentes (voir hypothèses (5.18) et (5.19) pour la convergence de la seconde série), il en résulte que (x_n) est une suite bornée.

1.2 ***A présent, démontrons que le point* 1.1 *de la démonstration implique le fait que la suite $\left(f^n(x_n)\right)$ tend vers*** $\inf f$.

En vertu de l'hypothèse (5.7) (f^n) est croissante et $f = \sup_n f^n$. Par conséquent les deux premières hypothèses du lemme 5.3 sont vérifiées.

Par ailleurs par l'hypothèse (5.18) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\inf f - \inf f^n\right) < \infty$. Le terme général de cette série à savoir $\inf f - \inf f^n$ tend donc vers zéro et par conséquent

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \inf f^n = \inf f.$$

On a donc en particulier

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \inf f^n \geq \inf f.$$

La troisième hypothèse du lemme 5.3 est donc également vérifiée.

De plus, les autres hypothèses du lemme 5.3, à savoir $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$ et $\varepsilon_n \to 0$ sont deux hypothèses qui sont trivialement vérifiées.

En effet, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$ provient du fait que $t_n \geq \underline{t}$ et $\varepsilon_n \to 0$ provient de la convergence de la série de terme général ε_n.

Par conséquent il résulte du lemme 5.3 que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) = \inf f. \tag{5.29}$$

D'autre part, d'après le schéma (5.1)

$$\forall x \quad f(x) \geq f^n(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_n}, x - x_n > -\varepsilon_n.$$

Dès lors, puisque $\frac{1}{t_n} \geq \frac{1}{\underline{t}}$ on en déduit

$$\forall x \quad f(x) \geq f^n(x_n) + \frac{1}{\underline{t}} < x_{n-1} - x_n, x - x_n > -\varepsilon_n. \tag{5.30}$$

Or par le point 1.1 de la démonstration $x_{n-1} - x_n \to 0$ et $x - x_n$ est bornée.
Par conséquent

$$\frac{1}{\underline{t}} < x_{n-1} - x_n, x - x_n > \to 0.$$

Il résulte donc de la relation (5.30) que

$$\forall x \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq f(x) - \overline{\lim}_{n\to\infty} \varepsilon_n.$$

Comme par ailleurs $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ le terme général de cette série ε_n tend vers zéro.
Dès lors

$$\forall x \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq f(x)$$

et donc

$$\forall x \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq f(x).$$

D'où par définition de la borne inférieure

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n) \leq \inf f.$$

En combinant ce résultat avec l'égalité (5.29) on trouve

$$\inf f = \overline{\lim_{n\to\infty}} f^n(x_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f^n(x_n).$$

Dès lors

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_n) = \inf f.$$

2. *Montrons ensuite que la suite (x_n) converge vers un minimum de f.*

A cette fin, prouvons que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) converge vers un minimum de f (voir point 2.1 de la démonstration) avant de montrer que toute la suite (x_n) converge vers un minimum de f (voir point 2.2 de la démonstration).

2.1 Montrons d'abord que toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est un minimum de f.

La suite (x_n) étant bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point $\bar{x}$.
Pour montrer que ce point $\bar{x} \in \text{Argmin}\, f$ nous avons besoin de quelques notions sur les convergences d'ensembles. Les deux types de convergences qui vont nous être plus particulièrement utiles sont la convergence au sens de Painlevé-Kuratowski et l'épiconvergence.

- Rappelons d'abord en quelques mots en quoi consistent ces deux types de convergence.
  Commençons par un bref rappel concernant la notion de convergence au sens de Painlevé-Kuratowski.

  Etant donné une suite de parties $A_1, A_2, A_3,\ldots$ de R^n munies de la topologie induite de R^n , on définit les limites topologiques inférieures et supérieures de la suite $\{A_n : n \in N\}$ par les formules

  $$L_i A_n = \{x \in X : \exists (a_n) \to x \text{ avec pour tout } n \in N, a_n \in A_n\}$$
  $$L_s A_n = \{x \in X : \exists n(1) < n(2) < n(3) < \cdots \text{et } \forall k \in N, a_k \in A_{n(k)} \text{ avec } a_k \to x\}.$$

  En d'autres termes, $L_i A_n$ est l'ensemble formé par toutes les limites possibles des suites $\{a_n : n \in N\}$ avec $a_n \in A_n$ pour tout n, alors que $L_s A_n$ est formé par toutes les valeurs d'adhérence de telles suites.

  Ces ensembles $L_i A_n$ et $L_s A_n$ peuvent être éventuellement vides, mais on a toujours l'inclusion $L_i A_n \subseteq L_s A_n$.
  De plus lorsque l'égalité a lieu, on dit que la suite $\{A_n \text{ tq } n \in N\}$ converge au sens de Painlevé-Kuratowski et on note $L_i A_n = L_s A_n$ pour la limite de A_n.

  Par ailleurs, lorsque A_n est l'épigraphe de f^n on dit que f^n épiconverge et on note la limite : epi lim f^n .

Remarque :

1) Une limite topologique d'épigraphes au sens de Painlevé Kuratowski est encore un épigraphe (cfr. bibliographie [1] page 30).

2) L'épiconvergence n'est en général pas comparable avec la convergence simple (elle fait intervenir les valeurs des fonctions au voisinage du point considéré).

   Cependant dans le cas des suites monotones, les deux notions coïncident modulo des opérations de fermeture :

   si la suite $\{f^n : n \in N\}$ est croissante
   alors $\quad \text{epi} \lim f^n = \sup\limits_{n \in N} \text{cl} f^n$

   où cl f^n est le supremum des fonctions affines qui minorent f^n.
   (cfr. bibliographie [1] page 30).

Parmi les principaux résultats concernant l'épiconvergence, citons le théorème suivant :

<u>Théorème de De Giorgi (1977)</u>

Soit $\{f; f^n, n \in N\}$ une suite de fonctions à valeurs réelles étendues.
Supposons qu'il existe :

- une suite $\{x_n : n \in N\}$ relativement compacte,
- une suite de réels positifs $\{\varepsilon_n ; n \in N\}$ tendant vers zéro tels que

$$\forall n \in N : x_n \in \varepsilon_n \text{ - argmin} f^n \overset{déf.}{=} \{x \in R^n : f^n(x) \leq \inf f^n + \varepsilon_n\}.$$

Alors l'épiconvergence de la suite $\{f_n : n \in N\}$ vers f entraîne

$$L_s \quad (\varepsilon_n - \text{argmin } f^n) \subseteq \text{argmin} f.$$

(Théorème admis) (cfr.bibliographie [1] page 31).

- Après ces quelques brefs rappels sur les convergences d'ensembles, montrons que $\bar{x} \in$ Argmin f.

  Grâce au théorème de "De Giorgi", pour conclure que $\bar{x} \in$ Argmin f, il suffit de montrer que toutes les hypothèses de ce théorème sont vérifiées et que $\bar{x} \in L_s \quad (\varepsilon_n - \text{argmin } f^n)$.

  a) Montrons pour commencer que les hypothèses du théorème de "De Giorgi" sont vérifiées.

     a-1) Vérifions d'abord que la suite (x_n) est relativement compacte.

     Rappel : une partie A de R^n est relativement compacte si et seulement si de toute suite A, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de R^n .

Donc, pour justifier que (x_n) est relativement compacte, il suffit de prouver qu'on peut extraire de toute sous-suite de $\{x_n : n \in N\}$ une sous-suite qui converge vers un point de R^n .

Cela découle du caractère borné de la suite (x_n).

a-2) Montrons ensuite que la seconde hypothèse du théorème de De Giorgi est vérifiée.

A cet effet, nous devons montrer qu'il existe une suite $\{\varepsilon_n : n \in N\}$ tq $\varepsilon_n \geq 0, \varepsilon_n \to 0$ et $\forall n \in N \quad x_n \in \varepsilon_n - \text{argmin}\, f^n$.

Par le point 2 de la démonstration on sait que $f^n(x_n) \to \inf f$.

Par ailleurs, grâce à l'hypothèse (5.18) $\sum_{n=1}^{\infty}(\inf f - \inf f^n) < \infty$.

Donc, puisque le terme général d'une série qui converge tend vers zéro $\inf f - \inf f^n \to 0$ et par conséquent

$$f^n(x_n) - \inf f^n \to 0.$$

Dès lors, par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad -\varepsilon \leq f^n(x_n) - \inf f^n \leq \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On obtient ainsi

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : f^n(x_n) - \inf f^n \leq \frac{1}{n}.$$

Posons alors

$$\varepsilon_n = f^n(x_n) - \inf f^n \quad \forall n < n_0$$
$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq n_0.$$

On a ainsi

$$\forall n < n_0 \quad f^n(x_n) = \inf f^n + \varepsilon_n$$
$$\forall n \geq n_0 \quad f^n(x_n) \leq \inf f^n + \varepsilon_n.$$

(ε_n) est donc une suite de réels positifs tendant vers zéro et tels que

$$\forall n \quad f^n(x_n) \leq \inf f^n + \varepsilon_n.$$

Par conséquent

$$\forall n \quad x_n \in \varepsilon_n - \text{argmin}\, f^n.$$

a.3) Vérifions finalement que la troisième hypothèse du théorème de De Giorgi, à savoir lim epi $f^n = f$, est satisfaite.

Comme f^n est croissante

$$\text{epi}\lim f^n = \sup_n \text{cl}\left(f^n\right)$$

(voir la seconde remarque dans le rappel de l'épiconvergence).
Par ailleurs f^n étant une fonction s.c.i,

$$\text{cl}\left(f^n\right) = f^n,$$

(voir proposition II.4 en annexe).
Par conséquent

$$\text{epi}\lim f^n = \sup_n\left(f^n\right) \overset{\text{déf}}{=} f.$$

b) Après avoir vérifié que toutes les hypothèses du théorème de De Giorgi sont satisfaites, pour conclure que $\bar{x} \in \text{Argmin} f$, il reste à vérifier que $\bar{x} \in L_s\left(\varepsilon_n - \text{Argmin} f^n\right)$.

$\bar{x}$ étant une valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)$, il existe une sous-suite $\left(x_{n_k}\right)$ telle que $x_{n_k} \to \bar{x}$.
Par ailleurs, on sait que $x_{n_k} \in \varepsilon_{n_k} - \text{argmin}\left(f^{n_k}\right)$. (voir (a.2))
$\bar{x}$ est donc la limite d'une sous-suite dont les éléments se trouvent dans le $\varepsilon_{n_k} - \text{argmin} f^{n_k}$.
Par conséquent $\bar{x} \in L_s\left(\varepsilon_n - \text{argmin} f^n\right)$ (définition de la limite supérieure topologique).

c) Grâce aux points a) et b), on a démontré qu'en appliquant le théorème de De Giorgi on a $\bar{x} \in \text{Argmin} f$. Dès lors, comme $\bar{x}$ est une valeur d'adhérence quelconque de la suite $\left(x_n\right)$, on a bien montré que toute valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)$ est un minimum de *f*.

2.2 *Montrons finalement que toute la suite* $\left(x_n\right)$ *converge vers* $\bar{x} \in \text{Argmin} f$.

En décomposant $x_{n-1} - \bar{x}$ en fonction des termes $x_{n-1} - x_n$ et $x_n - \bar{x}$, on a

$$\begin{aligned} \left\|x_{n-1} - \bar{x}\right\|^2 &= \left\|x_{n-1} - x_n + x_n - \bar{x}\right\|^2 \\ &= \left\|x_{n-1} - x_n\right\|^2 + 2 < x_{n-1} - x_n, x_n - \bar{x} > + \left\|x_n - \bar{x}\right\|^2. \end{aligned} \tag{5.31}$$

D'autre part par le schéma (5.1), $\dfrac{x_{n-1} - x_n}{t_n} \in \partial_{\varepsilon_n} f^n\left(x_n\right)$.

D'où par la propriété d'inégalité du ε_n-sous-différentiel,

$$\forall y \in R^n \quad f(y) \geq f^n(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_n}, y - x_n > -\varepsilon_n.$$

En prenant $y = \bar{x}$, il résulte que

$$f(\bar{x}) \geq f^n(x_n) + < \frac{x_{n-1} - x_n}{t_n}, \bar{x} - x_n > -\varepsilon_n,$$

ou encore

$$< \frac{x_{n-1} - x_n}{t_n}, x_n - \bar{x} > \geq f^n(x_n) - f(\bar{x}) - \varepsilon_n.$$

(5.31) devient donc

$$\begin{aligned}\|x_{n-1} - \bar{x}\|^2 &\geq \|x_{n-1} - x_n\|^2 + 2t_n\left[f^n(x_n) - f(\bar{x}) - \varepsilon_n\right] + \|x_n - \bar{x}\|^2 \\ &\geq \|x_n - \bar{x}\|^2 + 2t_n\left[f^n(x_n) - f(\bar{x}) - \varepsilon_n\right].\end{aligned}$$

La seconde inégalité provenant du caractère positif de $\|x_{n-1} - x_n\|^2$.
Dès lors, puisque $\inf f^n \leq f^n(x_n)$ et $t_n \geq \underline{t}$

$$\|x_{n-1} - \bar{x}\|^2 \geq \|x_n - \bar{x}\|^2 + 2\underline{t}\left[\inf f^n - f(\bar{x}) - \varepsilon_n\right].$$

D'où, puisque $\bar{x} \in$ Argmin f et que par conséquent $\inf f = f(\bar{x})$

$$\|x_{n-1} - \bar{x}\|^2 \geq \|x_n - \bar{x}\|^2 + 2\underline{t}\left[\inf f^n - \inf f - \varepsilon_n\right].$$

En posant $\delta_n = 2\underline{t}\left(\inf f - \inf f^n + \varepsilon_n\right)$ on obtient donc

$$\|x_n - \bar{x}\|^2 \leq \|x_{n-1} - \bar{x}\|^2 + \delta_n.$$

Dès lors, puisque (δ_n) est de manière assez évidente une suite positive et que $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$. Il résulte de la proposition 1.2 que toute la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$.

□

CHAPITRE 6 : APERCU DE DEUX ALGORITHMES PERMETTANT D'AUGMENTER LA VITESSE DE CONVERGENCE DES METHODES PRECEDENTES.

6.1 INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre, nous allons considérer le problème d'optimisation convexe suivant:

$$(P)\begin{cases} \min \ f_0(x) \\ s.c. \quad f_i(x) \leq 0 \quad i = 1,\cdots,n \\ \qquad\quad x \in C \end{cases}$$

où C est un ensemble convexe fermé non vide de R^n et $f_i \ : C \to R \quad i = 0,1,\cdots m$ sont des fonctions convexes semi-continues inférieurement.

On peut bien sûr résoudre ce problème en utilisant l'algorithme obtenu en couplant la méthode diagonale avec la pénalisation externe (voir chapitre précédent).
Mais comme nous n'avons aucun renseignement sur la vitesse de convergence de cet algorithme nous allons essayer dans ce chapitre , de découvrir une manière de résoudre le problème d'optimisation (P) en tenant compte de ce critère de vitesse de convergence et en essayant d'obtenir une vitesse de convergence superlinéaire.

On propose deux algorithmes différents :

- Le premier algorithme est une généralisation de l'algorithme proximal (vu dans la première partie) appliqué au problème primal (P).
- Tandis que le second algorithme est une généralisation de l'algorithme proximal mais appliqué au problème dual

$$(L)\left\{ \min_x \max_y l(x,y) \right. \qquad \text{où } l(x,y)\begin{cases} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x) \quad \text{si } x \in C \text{ et } y \in R_+^m \\ = -\infty \text{ si } x \in C \text{ et } y \notin R_+^m \\ = +\infty \text{ si } x \notin C. \end{cases}$$

Remarque :
On appellera respectivement ces algorithmes
VPA (Variable metrics Proximal minimization Algorithm) et
VPM (Variable metrics method of Multipliers).

Le paragraphe 6.2 sera consacré à l'étude de l'algorithme primal et le paragraphe 6.3 à l'algorithme dual.

6.2 APPLICATION PRIMALE

Dans ce paragraphe, nous découvrirons à la section 6.2.1 l'algorithme primal VPA. Ensuite, dans la section 6.2.2, nous citerons les résultats principaux que M. Qian [7] a obtenu pour la convergence de cet algorithme.

6.2.1 Description de l'algorithme VPA

Considérons le problème d'optimisation

$$(P)\begin{cases} \min f_0(x) \\ s.c.\ f_i(x) \le 0 \\ \quad x \in C \end{cases}$$

où C est un ensemble convexe, non vide, fermé de R^n et
$f_i : \ C \to R \quad i = 0, 1, \cdots, m$ sont des fonctions convexes, semi-continues inférieurement.

Posons $\Omega = \{x \in C \quad tq \quad f_i(x) \le 0 \qquad i = 0, 1, \cdots, m\}$ et

$$f = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ +\infty & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

f est alors une fonction convexe, propre, semi-continue inférieurement.

A l'aide de ces notations, on peut réécrire le problème (P) sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte $\min f(x)$.

La méthode la plus générale connue pour résoudre ce problème est l'algorithme du point proximal vu dans la première partie (chapitre 2).

Une itération de cet algorithme peut s'écrire comme suit :

$$x_{k+1} = x_k - t_k \gamma_k \quad \text{où} \quad \gamma_k \in \partial f(x_{k+1}),$$

ou encore

$$x_{k+1} + t_k \gamma_k = x_k \quad \text{où} \quad \gamma_k \in \partial f(x_{k+1}),$$

c'est-à-dire

$$(I + t_k T)(x_{k+1}) = x_k \quad \text{où} \quad T = \partial f,$$

ce qui est encore équivalent à

$$x_{k+1} = (I + t_k T)^{-1} x_k \quad \text{avec} \quad T = \partial f. \tag{6.1}$$

Cet algorithme a récemment connu un regain d'intérêt pour sa puissance théorique, mais cependant, on peut montrer qu'il possède une faible vitesse de convergence; ce qui constitue un inconvénient majeur pour cette méthode.

Dans ce paragraphe, nous étudierons donc une modification de l'implémentation de l'algorithme proximal.
Cette dernière possédera dans certains cas une vitesse de convergence assez grande. Sous certaines hypothèses de différentiabilité, cette vitesse pourra même devenir superlinéaire.

Remarquons d'abord que lorsque l'on exécute une itération de l'algorithme proximal, on doit résoudre le sous-problème

$$\min_y f(y) + \frac{1}{2t_k}\|y - x_k\|^2.$$

Par conséquent, si *f* est différentiable et si on linéarise *f* autour de x_k, cela revient à

$$\min_y f(x_k) + (\nabla f(x_k))^T y + \frac{1}{2t_k}\|y - x_k\|^2. \tag{6.2}$$

Le terme $\frac{1}{t_k}$ peut être considéré comme une longueur de pas.

De plus, lorsque la norme du sous-problème (6.2) est générée par la matrice Hessienne $H(x_k)$, le terme quadratique $\|y - x_k\|^2$ peut être remplacé par $(y - x_k)^{\mathrm{T}} H(x_k)(y - x_k)$. Par conséquent, il est assez facile de voir que l'itération proximale (6.2) est liée assez étroitement à l'itération de Newton

$$\min_y f(x_k) + (\nabla f(x_k))^T y + \frac{1}{2}(y - x_k)^{\mathrm{T}} H(x_k)(y - x_k). \tag{6.3}$$

C'est sur ce lien entre l'algorithme proximal et l'algorithme de Newton que nous nous baserons pour tenter d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme proximal.

Notre objectif est de construire un algorithme qui converge de manière globale comme l'algorithme proximal et qui possède la convergence quadratique de la méthode de Newton !

Une première idée est d'appliquer directement la méthode quasi-Newton à la fonction

$$f_\lambda(x) = \min_y \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right\},$$

mais cette approche semble assez difficile vu la complexité de f_λ.

Cependant, la remarque concernant la comparaison des termes quadratiques intervenant dans les sous-problèmes (6.2) et (6.3) nous invite assez facilement à vouloir ajuster la norme à chaque itération.

C'est cette idée qui est à la base du nouvel algorithme que nous allons introduire :

Soit (H_k) une suite de transformations linéaires continues de $R^n \rightrightarrows R^n$ définies positives. Remplaçons dans l'itération (6.1) le terme $t_k T$ par $(t_k H_k^{-1} T)$. On obtient ainsi une itération de la forme

$$x_{k+1} = P_k(x_k) \quad \text{où} \quad P_k = (I + t_k H_k^{-1} T)^{-1} \quad \text{et} \quad T = \partial f.$$

Notons cependant que pour calculer P_k, il faut calculer l'inverse d'une somme, ce qui n'est pas toujours évident. C'est pourquoi nous remplacerons l'itération précédente par

$$x_{k+1} \cong P_k(x_k) \quad \text{où} \quad P_k = (I + t_k H_k^{-1} T)^{-1} \quad \text{et} \quad T = \partial f.$$

On peut réexprimer cela de la manière suivante.

$$x_{k+1} \cong x_k + P_k(x_k) - x_k,$$

ou encore

$$x_{k+1} = x_k + w_k \quad \text{où} \quad w_k \cong [P_k - I](x_k).$$

Définissons $D_k = \left(I + t_k H_k^{-1} T\right)^{-1} - I$ avec $T = \partial f$. (6.4)

On a alors l'itération suivante :

$$x_{k+1} = x_k + w_k \quad \text{avec} \quad w_k \cong D_k(x_k). \tag{6.5}$$

Cependant, cette implémentation de l'algorithme proximal a un sérieux inconvénient. En effet, on essaye de générer une suite dont le comportement est le plus proche possible de celui d'une suite générée par la méthode de Newton, on espère donc ainsi atteindre la solution optimale en une seule itération lorsqu'on minimise une fonction quadratique fortement convexe. Ce qui n'est pas notre cas.

Afin de retrouver cette propriété de la méthode de Newton, nous introduisons une variante à l'itération précédente.

En effet, dans l'itération (6.5) on peut facilement interpréter l'opérateur D_k comme générant une direction à partir du point x_k. Par conséquent, l'idée est d'ajouter une longueur de pas à l'algorithme.

Ce nouvel algorithme peut alors se résumer comme suit :

> Soit $x_1 \in R^n$ fixé
>
> et x_k donné par l'itération k.
>
> On pose $x_{k+1} = x_k + \theta_k w_k$ où $w_k \cong D_k(x_k)$
>
> De plus, pour tout k, on demande
>
> · $\theta_k \geq 1 + \delta$ avec $\delta > 0$,
>
> · $1 \leq \theta_k \leq 2 - \overline{\delta}$ avec $\overline{\delta} > 0$.

(6.6)

Pour rejoindre les algorithmes donnés à ce sujet dans la littérature, les propositions suivantes sont requises.

Proposition 6.1

> Si D_k est défini par la relation (6.4)
> alors l'opérateur D_k peut se réexprimer comme
>
> $D_k = -\left(I + T^{-1} H_k \dfrac{1}{t_k}\right)^{-1}$ où T est le sous-différentiel ∂f.

Preuve :

Puisque D_k est défini par la relation (6.4) on a pour tout $w \in R^n$.

$$w \in D_k(z) \Leftrightarrow w \in \left(I + t_k H_k^{-1} T\right)^{-1}(z) - z \qquad \text{avec } T = \partial f$$

$$\Leftrightarrow w + z \in \left(I + t_k H_k^{-1} T\right)^{-1}(z).$$

En appliquant $\left(I+t_k H_k^{-1}T\right)$ de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} w \in D_k(z) &\Leftrightarrow z \in \left(I+t_k H_k^{-1}T\right)(w+z) \\ &\Leftrightarrow z \in w+z+t_k H_k^{-1}T(w+z) \\ &\Leftrightarrow w \in -t_k H_k^{-1}T(w+z). \end{aligned}$$

De même en appliquant $T^{-1}H_k\left(\dfrac{-1}{t_k}\right)=\left(-t_k H_k^{-1}T\right)^{-1}$ de chaque côté on a

$$\begin{aligned} w \in D_k(z) &\Leftrightarrow w+z \in T^{-1}H_k\left(\frac{-1}{t_k}w\right) \\ &\Leftrightarrow z \in \left(I+T^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\right)(-w) \\ &\Leftrightarrow w \in -\left(I+T^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\right)^{-1}(z). \end{aligned}$$

□

<u>Proposition 6.2</u>

Si w_k est défini par la relation (6.5)
alors $w_k \cong D_k\left(x_k\right)$
si et seulement si
$$w_k \cong \operatorname{argmin}\ \varphi_k^{(p)}(w)$$
où $\varphi_k^{(p)}(w)=f\left(x_k+w\right)+\dfrac{1}{2t_k}w^{\mathrm{T}}H_k w$.

<u>Preuve</u> :

Par la proposition 6.1, en posant $T=\partial f$ on a

$$w_k \cong D_k\left(x_k\right) \Leftrightarrow w_k \cong -\left(I+T^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\right)^{-1}\left(x_k\right).$$

Dès lors en appliquant $\left(I+T^{-1}H_k\dfrac{1}{t_k}\right)$ au point w_k on obtient

$$\begin{aligned} w_k \cong D_k\left(x_k\right) &\Leftrightarrow \left(I+T^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\right)\left(w_k\right) \cong -x_k \\ &\Leftrightarrow w_k+x_k \cong T^{-1}H_k(-)\frac{1}{t_k}\left(w_k\right). \end{aligned}$$

De même en appliquant T au point $w_k + x_k$ on trouve

$$w_k \cong D_k(x_k) \Leftrightarrow T(w_k + x_k) \cong H_k \frac{1}{t_k}(-w_k)$$

$$\Leftrightarrow T(w_k + x_k) + \frac{1}{t_k} H_k w_k \cong 0.$$

De plus comme l'opérateur T est le sous-différentiel de f il en résulte que

$$w_k \cong D_k(x_k) \Leftrightarrow \partial f(w_k + x_k) + \frac{1}{t_k} H_k w_k \cong 0$$

$$\Leftrightarrow \partial \left[f(w + x_k) + \frac{1}{2t_k} w^{\mathrm{T}} H_k w \right] \Bigg|_{w=w_k} \cong 0$$

$$\Leftrightarrow \partial \varphi_k^{(p)}(w) \Big|_{w=w_k} \cong 0.$$

D'où en utilisant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement (voir proposition V.1 en annexe) on en déduit

$$w_k \cong D_k(x_k) \Leftrightarrow w_k \cong \text{argmin } \varphi_k^{(p)}(w).$$

□

Ces deux théorèmes nous permettent donc de réécrire l'algorithme (6.6) de la manière suivante

Soients $x_1 \in R^n$ fixé,
x_k donné par l'itération k.
1) On choisit
•) $H_k \in R^{n \times n}$ une matrice définie positive liée aux propriétés différentielles de f.
•) $t_k > 1$.
2) On pose
•) $w_k \cong \underset{w \in R^n}{\text{argmin}}\ \phi_k^{(p)}(w)$ avec $\phi_k^{(p)}(w) = f(x_k + w) + \frac{1}{2t_k} w^{\mathrm{T}} H_k w$
•) $x_{k=1} = x_k + \theta_k w_k$ avec $1 \le \theta_k < 2$.

(6.7)

Pour que l'algorithme (6.7) soit complet, il reste encore à préciser le choix de θ_k. Evidemment, on souhaite que la suite (x_k) générée par l'algorithme se trouve dans l'ensemble Ω des contraintes du problème (P). Par conséquent, il faut choisir θ_k de manière à ce que $x_{k+1} = x_k + \theta_k w_k \in \Omega$.
Un choix possible pour θ_k est donc de prendre

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{1+t_k}{t_k} & \text{si } x_k + \left(\dfrac{1+t_k}{t_k}\right) w_k \in \Omega \\ = \max\{\theta \text{ tq } x_k + \theta\, w_k \in \Omega \text{ et } \theta < 2\} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'algorithme VPA est donc le suivant.

Soient $x_1 \in R^n$ fixé,
x_k donné par l'itération k.
1) On choisit
•) $H_k \in R^{n \times n}$ une matrice définie positive liée aux propriétés différentielles de f.
•) $t_k > 1$.
2) On pose
•) $w_k \cong \text{argmin } \phi_k^{(p)}(w)$ avec $\phi_k^{(p)}(w) = f(x_k + w) + \dfrac{1}{2t_k} w^T H_k w$.
•) $x_{k=1} = x_k + \theta_k w_k$
avec

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1+t_k}{t_k} && \text{si } x_k + \left(\frac{1+t_k}{t_k}\right) w_k \in \Omega \\ &= \max\{\theta \text{ tq } x_k + \theta\, w_k \in \Omega \text{ et } \theta < 2\} && \text{sinon} \end{aligned}$$

Algorithme VPA

Remarquons que le choix de θ_k vérifie bien la propriété $1 \le \theta_k < 2$.

- Montrons d'abord que θ_k est plus grand ou égal à 1.

  Cela découle de la définition de θ_k et du fait que $x_k + \theta\, w_k \in \Omega$ pour $\theta = 1$.
  En effet, par définition, $w_k \cong \text{argmin } \varphi_k^{(p)}(w)$ et par conséquent,il suit de la définition de $\varphi_k^{(p)}$ que $f(x_k + w_k) < \infty$. Par conséquent $x_k + 1\, w_k \in \Omega$.
- Remarquons ensuite que grâce à la définition de θ_k, θ_k est strictement inférieur à 2.

Après avoir envisagé l'algorithme primal VPA, nous citerons dans la section suivante les principaux résultats que M. Qian [7] a obtenu pour la convergence de cet algorithme.

6.2.2 Convergence de l'algorithme VPA

En supposant que la suite des matrices (H_k) soit bornée et que ces matrices soient uniformément définies positives, M. Qian a montré que moyennant certains critères précisant l'approximation $w_k \cong D_k(x_k)$, toute suite (x_k) générée par l'algorithme précédent converge lorsqu'elle est bornée, vers une solution optimale.

Pour le rappel de la définition de l'uniforme définie positivité des matrices, il faut se référer à l'annexe VI.

Pour que cette convergence soit superlinéaire, des hypothèses supplémentaires sur les problèmes (P) et (L) sont nécessaires.
Pour rappel,

$$(L) \equiv \min_x \ \max_y \ l(x,y) \ \text{ où } l(x,y) = \begin{cases} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x) & \text{si } x \in C \text{ et } y \in R_+^m \\ -\infty \quad \text{si } x \in C \text{ et } y \notin R_+^m \\ +\infty \quad \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Ces hypothèses seront appelées par la suite hypothèses de convergence de base (BCH). Ces hypothèses sont les suivantes:

Hypothèses BCH

a) Condition suffisante du second ordre

- Il existe un point selle $(\bar{x},\bar{y})$ de l tq $(\bar{x},\bar{y}) \in \operatorname{int} C$.

  (Rappel : comme l est une fonction convexe en x et concave en y, $(\bar{x},\bar{y})$ est un point selle de l si et seulement si $(\bar{x},\bar{y}) \in (\partial_x l, -\partial_y l)$).

- De plus les fonctions $f_i \quad i = 0,\cdots,m$ sont deux fois différentiables dans un voisinage de $\bar{x}$.

b) Condition de complémentarité stricte

Soit $I = \{i \in \{1\cdots m\} \ \text{ tq } \ f_i(\bar{x}) = 0\}$ l'ensemble des indices des contraintes actives en $\bar{x}$.
Alors $\overline{y_i} > 0 \quad \forall i \in I$.

c) Indépendance linéaire

Soit I l'ensemble défini en b).
Les gradients $\nabla f_i(\bar{x}) \quad i \in I$ sont linéairement indépendants.

d) Définie positivité du Hessien sur un sous-espace

La matrice Hessienne $H = \nabla_x^2 l(x,y)$ est définie positive sur le sous-espace tangent $\{w \ \text{ tq } \ w^{\mathrm{T}} \nabla f_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \in I\}$.

Ces hypothèses vont permettre de garantir que $\bar{x}$ est l'unique solution optimale de (P) et $(\bar{x},\bar{y})$ l'unique solution optimale de (D).

Par ailleurs, elles vont également assurer le caractère différentiable ainsi que la lipschitz continuité de l'opérateur T^{-1} où $T = \partial f$.

La notion de différentiabilité que l'on emploie dans ce contexte est la suivante :

L'opérateur inverse T^{-1} est différentiable en l'origine si

- $T^{-1}(0)$ est un singleton $\{\bar{z}\}$,
- il existe une transformation linéaire A telle que

  $\exists \delta > 0 \quad \emptyset \neq T^{-1}(w) - \bar{z} - Aw \subset o(\|w\|)B$ lorsque

  $\|w\| \leq \delta$ et $\dfrac{o(\|w\|)}{\|w\|} \to 0$ quand $\|w\| \to 0$.

  On note $A = \nabla T^{-1}(0)$.

Cette propriété de différentiabilité de l'opérateur T^{-1} joue un rôle essentiel dans l'étude de la vitesse de convergence de l'algorithme VPA.

On peut en effet montrer que, pour que cet algorithme converge de manière superlinéaire, il faut ajouter au caractère borné de la suite garantissant la convergence, deux hypothèses dont l'une d'entre elles (la seconde) fait intervenir le caractère différentiable de T^{-1}.

En effet,dans la première hypothèse, le caractère différentiable n'intervient pas car il est seulement indispensable que les matrices H_k générant la métrique convergent dans la direction $x_{k+1} - x_k$ vers la matrice Hessienne de la fonction objectif en la solution.

Par contre, dans la seconde hypothèse, T^{-1} doit être différentiable et sa dérivée $A = \nabla T^{-1}(0)$ doit être non singulière !

NB: Dans le cas où les contraintes sont polyhédrales, on peut montrer que l'on peut identifier les contraintes actives en un nombre fini d'itérations et que, grâce à cette propriété, il n'est plus nécessaire, pour avoir une convergence superlinéaire, d'imposer que A soit non singulière !

6.3 APPLICATION DUALE

Comme on vient de le voir à la section précédente, l'objectif que nous nous étions fixé au début de ce chapitre, à savoir obtenir une plus grande vitesse de convergence vers la solution optimale du problème (P) est atteinte quand on applique l'algorithme VPA.

En effet, dans ce cas, on a vu que moyennant certaines hypothèses de différentiabilité dans un voisinage de l'origine, la suite générée converge de manière superlinéaire.

Essayons maintenant de reproduire le raisonnement que l'on a suivi à la section 6.2 sur le problème primal en appliquant celui-ci au problème dual.

Nous verrons que dans ce cas-ci aussi, on peut atteindre une vitesse de convergence pouvant être superlinéaire.

6.3.1 Description de l'algorithme VPM

Dans cette section, supposons $C = R^n$. Posons

$$H_k = \begin{pmatrix} H_{1k} & H_{3k} \\ -H_{3k}^{\mathrm{T}} & H_{2k} \end{pmatrix}$$

où $H_{1k} \in R^{n\times n}$ est symétrique,

$H_{3k} \in R^{n\times m}$,

$H_{2k} = \operatorname{diag}\left(h_1^{(k)},\cdots,h_m^{(k)}\right) > 0$

et supposons toutes ces matrices H_k non singulières.

Comme le problème qui nous intéresse dans cette section est le problème dual :

$$\min_x \max_y \; l(x,y) \qquad \text{où} \qquad l(x,y) = \begin{cases} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x) & \text{si } y \in R_+^m \text{ et } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \\ -\infty & \text{si } x \in C, y \notin R_+^m \end{cases}$$

la fonction à optimiser est la fonction lagrangienne l et non plus la fonction f.
Il suffit dès lors, pour résoudre le problème dual, d'utiliser l'algorithme (6.6) en remplaçant $\mathrm{T} = \partial f$ par $\mathrm{T} = \partial l$.
La proposition suivante va nous permettre de réexprimer sous une forme équivalente le calcul effectué à la $k^{ième}$ étape, à savoir $(v_k, u_k)^T \cong D_k\left((x_k, y_k)^T\right)$.

Proposition 6.3

$$(\bar{v}_k, \bar{u}_k)^T \in D_k\left((x_k, y_k)^T\right) \quad \text{si et seulement si}$$

$$(\bar{v}_k, \bar{u}_k)^T \text{ résout le problème } \min_{v\in R^n} \max_{u\in R^m} \phi_k(v,u) \tag{6.8}$$

$$\text{où } \phi_k(v,u) = l(x_k + v, y_k + u) + \frac{1}{2t_k} v^{\mathrm{T}} H_{1k} v + \frac{1}{t_k} v^{\mathrm{T}} H_{3k} u - \frac{1}{2t_k} u^{\mathrm{T}} H_{2k} u.$$

Preuve :

En appliquant la proposition 6.1 lorsque $\mathrm{T} = \partial l$ on sait que

$$\left(\overline{v_k}, \overline{u_k}\right)^T \in D_k\left((x_k, y_k)^{\mathrm{T}}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix} \in -\left(I + \mathrm{T}^{-1} H_k \frac{1}{t_k}\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour prouver la thèse, montrons que la propriété

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix} \in -\left(I + \mathrm{T}^{-1} H_k \frac{1}{t_k}\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

est vérifiée si et seulement si la relation (6.8) est vérifiée.

Appliquons d'abord l'opérateur $-\left(I+\mathrm{T}^{-1}H_k\dfrac{1}{t_k}\right)$ sur chaque terme de (6.9).

On obtient ainsi

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \in -\left(I+\mathrm{T}^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\right)\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x_k+\bar{v}_k \\ y_k+\bar{u}_k \end{pmatrix} \in -\mathrm{T}^{-1}H_k\frac{1}{t_k}\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix}.$$

Dès lors en appliquant de chaque côté l'opérateur $-\mathrm{T}$, il résulte que

$$\frac{1}{t_k}H_k\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix} \in -\mathrm{T}\begin{pmatrix} x_k+\bar{v}_k \\ y_k+\bar{u}_k \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$0 \in \frac{1}{t_k}H_k\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix}+\mathrm{T}\begin{pmatrix} x_k+\bar{v}_k \\ y_k+\bar{u}_k \end{pmatrix}.$$

Si on décompose à présent H_k en fonction des H_{ik} et si on remplace T par sa valeur, on obtient ainsi

$$0 \in \frac{1}{t_k}\begin{pmatrix} H_{1k} & H_{3k} \\ -H_{3k}^{\mathrm{T}} & H_{2k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \partial_v l\left(x_k+\bar{v}_k, y_k+\bar{u}_k\right) \\ -\partial_u l\left(x_k+\bar{v}_k, y_k+\bar{u}_k\right) \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on en déduit que

$$0 \in \begin{pmatrix} \partial_v l\left(x_k+\bar{v}_k, y_k+\bar{u}_k\right)+\dfrac{1}{t_k}H_{1k}\bar{v}_k+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}\bar{u}_k \\ -\partial_u l\left(x_k+\bar{v}_k, y_k+\bar{u}_k\right)-\dfrac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}\bar{v}_k+\dfrac{1}{t_k}H_{2k}\bar{u}_k \end{pmatrix}.$$

En utilisant la définition de $\phi_k(v,u)$, il résulte que

$$0 \in \begin{pmatrix} \partial_v \phi_k\left(\bar{v}_k, \bar{u}_k\right) \\ -\partial_u \phi_k\left(\bar{v}_k, \bar{u}_k\right) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, comme ϕ_k est une fonction convexe en v et concave en u (cela est dû au fait que l est concave en la première variable et convexe en la seconde, et à la définition de ϕ_k), on obtient en utilisant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalisation d'une fonction convexe et d'une fonction concave que

$$\left(\bar{v}_k, \bar{u}_k\right)^{\mathrm{T}} \text{ résout } \min_{v\in R^n}\ \max_{u\in R^m}\ \phi_k(v,u).$$

□

Grâce au théorème précédent, on pressent que pour réexprimer l'itération k de l'algorithme (6.6) on va devoir donner une expression à $\bar{u}_k$ et $\bar{v}_k$ (solutions du problème (6.8)).

Pour cela, procédons en deux étapes.

1) D'abord fixer v et chercher $\bar{u}_k$ tel que $\bar{u}_k = \underset{u \in R^m}{\operatorname{argmax}}\, \phi_k(v,u)$.

Proposition 6.4

Soit $v \in R^n$ fixé, $F(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_m(x)\right)^{\mathrm{T}}$,

$\bar{u}_k = \underset{u \in R^m}{\operatorname{argmax}}\, \phi_k(v,u)$.

Alors $\bar{u}_k$ peut se réexprimer comme suit

$$\left(\bar{u}_k\right)_i = \frac{t_k\left(F(x_k + v) + \frac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}} v\right)_i}{h_i^{(k)}} \quad \text{si } \left(F(x_k + v) + \frac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}} v\right)_i \geq -(y_k)_i \frac{h_i^{(k)}}{t_k}$$

$$\left(\bar{u}_k\right)_i = -(y_k)_i \quad \text{sinon.} \tag{6.10}$$

Preuve :

voir appendice (§6.4).

2) Ensuite, substituer cette solution $\bar{u}_k$ dans $\phi_k(v,u)$ et essayer d'en déduire la valeur de $\bar{v}_k$. La proposition suivante précise cette valeur.

Proposition 6.5

Si on note la i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice H par $H(\cdot\,,i)$, alors

$\bar{v}_k$ résout le problème de minimisation suivant :

$$\min_{v \in R^n} \phi_k^{(L)}(v) \tag{6.11}$$

où

$$\phi_k^{(L)}(v) = f_0(x_k + v) + \frac{1}{2t_k} v^{\mathrm{T}} H_{1k} v + \sum_{i=1}^{m} \Psi\left(f_i(x_k + v), (y_k)_i, v, t_k, h_i^{(k)}, H_{3k}(\cdot\,,i)\right)$$

et

$$\Psi(f_i, y_i, v, c, h_i, a) = f_i y_i + \frac{c}{2h_i}\left(f_i + \frac{1}{c} a^{\mathrm{T}} v\right)^2 \quad \text{si } f_i + \frac{1}{c} a^{\mathrm{T}} v > -\frac{y_i h_i}{c}$$

$$= -\frac{h_i y_i^2}{2c} - \frac{y_i}{c} a^{\mathrm{T}} v \quad \text{si } f_i + \frac{1}{c} a^{\mathrm{T}} v \leq -\frac{y_i h_i}{c}.$$

Preuve :

voir appendice (§6.4).

Grâce à ces valeurs de $\bar{u}_k$ et $\bar{v}_k$, on peut réexprimer l'algorithme (6.6) comme suit.

<u>PAS 0</u> :	Choisir $(x_1, y_1) \in R^{n+m}$ et poser $k = 1$.
<u>PAS 1</u> :	* Choisir $t_k > 1, 1 \leq \theta_k < 2$, $H_{1k} \in R^{n \times n}$ symétrique, $H_{2k} = \text{diag}\left(h_1^{(k)}, \cdots, h_m^{(k)}\right) > 0$, $H_{3k} \in R^{n \times m}$. * Poser $y_{k+1} = y_k + \theta_k \bar{u}_k$ où $\bar{u}_k = \left(\left(\bar{u}_k\right)_i\right)_{i=1\cdots m}$ est donné par la prop. 6.4 avec $v = v_{k-1}$. et $x_{k+1} = x_k + \theta_k \bar{v}_k$ où $\bar{v}_k \cong \underset{v \in R^n}{\text{argmin}}\ \phi_k^{(L)}(v)$ avec $\phi_k^{(L)}$ défini par (6.11). * Poser $k = k + 1$ et recommencer le pas 1.

(6.12)

Il reste encore pour terminer à préciser la valeur de θ_k.
Cette dernière ne peut prendre n'importe quelle valeur.
En effet, le problème qui nous intéresse est

$$\min_x \max_y \ l(x,y)$$

On a donc tout intérêt à ce que la suite (y_k) soit positive,
sinon par définition de la fonction lagrangienne, on aurait $\forall x \in C \quad \max_y l(x,y) = -\infty$.

Par conséquent, il faut choisir $y_1 \geq 0$ et il faut prendre θ_k de manière à ce que

$$y_{k+1} = y_k + \theta_k \bar{u}_k \geq 0$$

lorsque $y_k \geq 0$.

La proposition suivante nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que y_{k+1} soit positif lorsque y_k l'est.

<u>Proposition 6.6</u>

> Soit $y_{k+1} = y_k + \theta_k \bar{u}_k$ avec $y_k \geq 0$.
> Alors
>
> $y_{k+1} \geq 0$ si et seulement si
>
> $$\left(y_{k+1}\right)_i = 0 \quad \text{si } \left(y_k\right)_i = -\left(\bar{u}_k\right)_i$$
> $$= \left(y_k\right)_i + \theta_k \left(\bar{u}_k\right)_i \quad \text{avec } \theta_k \leq \min_{-(y_k)_i < (\bar{u}_k)_i < 0} \left\{ \frac{-\left(y_k\right)_i}{\left(\bar{u}_k\right)_i} \right\} \quad \text{sinon.}$$

Preuve :

Par la proposition 6.4 : $\left(\bar{u}_k\right)_i \geq \left(-y_k\right)_i$.
Dès lors, subdivisons la preuve en deux parties :
Etudions d'abord le cas où $\left(\bar{u}_k\right)_i = \left(-y_k\right)_i$
et examinons ensuite le cas où $\left(\bar{u}_k\right)_i > \left(-y_k\right)_i$.

- Dans un premier temps supposons que $\left(\bar{u}_k\right)_i = \left(-y_k\right)_i$ et montrons que $\left(y_{k+1}\right)_i$ est positif si et seulement si $\left(y_{k+1}\right)_i$ est nul.

  Il suffit de remarquer que $\left(y_{k+1}\right)_i$ ne peut être strictement positif.

  Supposons par l'absurde $\left(y_{k+1}\right)_i > 0$, dans ce cas

$$\left(y_{k+1}\right)_i = \left(y_k\right)_i + \theta_k\left(\bar{u}_k\right)_i > 0.$$

  De plus comme on est dans le cas où $\left(y_k\right)_i = \left(-\bar{u}_k\right)_i$, il en résulte que

$$\left(y_{k+1}\right)_i = \left(1-\theta_k\right)\left(y_k\right)_i > 0. \tag{6.13}$$

  Or par construction de l'algorithme $\left(1-\theta_k\right) \leq 0$, (6.13) se réduit donc à $\theta_k > 1$ et $\left(y_k\right)_i < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $y_k \geq 0$.

- Supposons à présent que $-\left(y_k\right)_i < \left(\bar{u}_k\right)_i$.

  Comme par hypothèse $y_{k+1} = y_k + \theta_k \bar{u}_k$ on peut réexprimer $\left(y_{k+1}\right)_i$ comme suit

$$\left(y_{k+1}\right)_i = \left(y_k\right)_i + \theta_k\left(\bar{u}_k\right)_i.$$

  Il suffit donc pour démontrer la proposition 6.6 de justifier que $\left(y_{k+1}\right)_i$ est positif si et seulement si $\theta_k \leq \min\limits_{-\left(y_k\right)_i < \left(\bar{u}_k\right)_i < 0} \left\{ \frac{-\left(y_k\right)_i}{\left(\bar{u}_k\right)_i} \right\}$.

  Pour cela, on procédera en deux étapes. On éliminera d'abord le cas où $\left(\bar{u}_k\right)_i \geq 0$ en montrant que dans ce cas $\left(y_{k+1}\right)_i$ est toujours positif. Ensuite, on montrera que lorsque $\left(\bar{u}_k\right)_i < 0$ on a $\left(y_{k+1}\right)_i \geq 0 \Leftrightarrow \theta_k \leq \frac{\left(-y_k\right)_i}{\left(\bar{u}_k\right)_i}$.

  - Montrons d'abord que $\left(y_{k+1}\right)_i$ est positif lorsque $\left(\bar{u}_k\right)_i$ est positif.

    Par hypothèse $y_k \geq 0$ et par construction $\theta_k \geq 1 > 0$.

    Dès lors $\left(y_{k+1}\right)_i = \left(y_k\right)_i + \theta_k\left(\bar{u}_k\right)_i$ sera toujours positif lorsque $\left(\bar{u}_k\right)_i \geq 0$.

- Montrons ensuite que lorsque $(\bar{u}_k)_i$ est strictement négatif alors $(y_{k+1})_i$ est positif si et seulement si $\theta_k \le \dfrac{(-y_k)_i}{(\bar{u}_k)_i}$.

  Or $(y_{k+1})_i = (y_k)_i + \theta_k(\bar{u}_k)_i$ est positif si et seulement si $(y_k)_i \ge -\theta_k(\bar{u}_k)_i$.
  Par conséquent puisque $(\bar{u}_k)_i$ est négatif, on en déduit que $(y_{k+1})_i$ est positif si et seulement si $\theta_k \le \dfrac{(-y_k)_i}{(\bar{u}_k)_i}$.

□

Grâce à la proposition précédente, on sait donc qu'on ne pourra pas toujours choisir $\theta_k = \dfrac{1+t_k}{t_k}$ car dans ce cas on n'est pas nécessairement assuré que $y_{k+1} \ge 0$.

Par contre, ce que l'on peut faire, c'est choisir $\theta_k = \min\left\{ \min\limits_{(-y_k)_i < (\bar{u}_k)_i < 0} \left\{ \dfrac{-(y_k)_i}{(\bar{u}_k)_i} \right\}, \dfrac{1+t_k}{t_k} \right\}$.

Le choix de θ_k étant maintenant précisé, nous pouvons réécrire l'algorithme (6.12) en fonction de ce dernier et obtenir ainsi l'algorithme dual VPM .

<u>PAS 0</u> : * Choisir $(x_1, y_1) \in R^{n+m}$ avec $y_1 \ge 0$.
Poser $k = 1$.

<u>PAS 1</u> : * Choisir $t_k > 1, 1 \le \theta_k < 2$,
$H_{1k} \in R^{n \times n}$ symétrique,
$H_{2k} = \mathrm{diag}\left(h_1^{(k)}, \cdots, h_m^{(k)}\right) > 0$,
$H_{3k} \in R^{n \times m}$.

* Poser y_{k+1} de manière à ce que

$$(y_{k+1})_i \begin{cases} = (y_k)_i + \theta_k(\bar{u}_k)_i & \text{si } (\bar{u}_k)_i \ne (-y_k)_i \\ = 0 & \text{si } (y_k)_i = -(\bar{u}_k)_i \end{cases}$$

où ° $\bar{u}_k$ est défini par la proposition 6.4 avec $v = v_{k-1}$,

° $\theta_k = \min\left\{ \min\limits_{(-y_k)_i < (\bar{u}_k)_i < 0} \left\{ \dfrac{-(y_k)_i}{(u_k)_i} \right\}, \dfrac{1+t_k}{t_k} \right\}$.

* Poser $x_{k+1} = x_k + \theta_k v_k$ où $v_k \cong \underset{v \in R^n}{\mathrm{argmin}}\, \phi_k^{(L)}(v)$ et $\phi_k^{(L)}$ est défini dans la proposition 6.5.

Algorithme (VPM)

Dans la section suivante, nous citons les principaux résultats de convergence de cet algorithme.

6.3.2 Convergence de l'algorithme VPM

Les résultats de convergence que M.Qian [7] a obtenu pour l'algorithme dual sont assez semblables à ceux qu'elle a obtenu pour l'algorithme primal.

En effet, dans un premier temps, moyennant certains critères précisant l'approximation de $(v_k, u_k)^{\mathrm{T}} \approx D_k\left((x_k, y_k)^{\mathrm{T}}\right)$ elle a établi les hypothèses indispensables sur les matrices H_k pour que la suite (x_k, y_k) générée par l'algorithme dual converge, lorsqu'elle est bornée, vers un point (x^*, y^*) où x^* est <u>une</u> des solutions optimales du problème (P) et (x^*, y^*) <u>une</u> des solutions optimales du problème (L).

Ces hypothèses sont les suivantes :

- la suite des matrices (H_k) doit être bornée et uniformément définie positive ;
- la matrice H_{2k} doit tendre vers la matrice $H_2 = \mathrm{diag}(h_1, \cdots, h_m)$;
- (H_{3k}) doit être une suite bornée et pour tout k les colonnes de H_{3k} doivent être linéairement indépendantes.

Comme on peut le constater, ces hypothèses sont assez proches des hypothèses de convergence que l'on a établies pour qu'une suite (x_k) qui est bornée et générée par l'algorithme primal converge.

Après cela, comme dans le cas primal, elle s'est intéressée à la vitesse de convergence. De plus, comme pour l'algorithme primal, elle a eu besoin d'hypothèses supplémentaires sur les problèmes (P) et (L). Ces hypothèses supplémentaires sont encore les hypothèses BCH.

Rappelons que ces hypothèses garantissent l'unicité des solutions optimales des problèmes (P) et (L) ainsi que le caractère différentiable du moins dans un voisinage de l'origine de l'opérateur T^{-1}, où cette fois l'opérateur T est le sous-différentiel de l.

Cette propriété de différentiabilité va ici aussi jouer un rôle important dans l'étude de la vitesse de convergence.

En effet, moyennant certaines hypothèses de convergence sur les matrices H_{ik}, on a essentiellement besoin pour assurer la convergence superlinéaire de l'algorithme dual que :

- le calcul de $(\bar{v}_k, \bar{u}_k)^{\mathrm{T}} \cong D_k\left((x_k, y_k)^{\mathrm{T}}\right)$ soit réalisé avec exactitude ;
- $(\bar{v}_k, \bar{u}_k)^{\mathrm{T}}$ tende vers $(0,0)$;
- T^{-1} soit différentiable dans un voisinage de l'origine.

Les hypothèses ci-dessus font donc ici aussi intervenir le caractère différentiable de T^{-1}. Cependant, elles sont quelque peu différentes des hypothèses établies dans le cas de l'algorithme primal VPA.

En effet, pour l'algorithme dual on se contente de vérifier que l'opérateur T^{-1} est différentiable en l'origine, mais on ne se préoccupe pas de savoir, comme c'est le cas dans l'algorithme primal, si la dérivée $A = \nabla \mathrm{T}^{-1}(0)$ est singulière ou non.

De plus, au lieu d'imposer comme précédemment que la suite que l'on génère soit bornée, on impose que la suite $(v_k, u_k)^{\mathrm{T}}$ converge vers 0.

Cependant, même si les résultats obtenus pour chacun des algorithmes primal et dual ne sont pas tout à fait les mêmes, on peut quand même remarquer dans chacun de ces deux algorithmes la nécessité de la différentabilité en l'origine pour pouvoir converger de manière superlinéaire vers la solution.

6.4 APPENDICE : DEMONSTRATION DES PROPOSITIONS 6.4 ET 6.5

Proposition 6.4

Soit $v \in R^n$ fixé, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^{\mathrm{T}}$,

$$\bar{u}_k = \underset{u \in R^m}{\operatorname{argmax}}\ \phi_k(v,u).$$

Alors $\bar{u}_k$ peut se réexprimer comme suit

$$(\bar{u}_k)_i = \frac{t_k\left(F(x_k + v) + \frac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}v\right)_i}{h_i^{(k)}} \quad \text{si} \left(F(x_k + v) + \frac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}v\right)_i \geq -(y_k)_i \frac{h_i^{(k)}}{t_k}$$

$$(\bar{u}_k)_i = -(y_k)_i \quad \text{sinon.} \tag{6.10}$$

Preuve :

Par définition

$$\phi_k(v,u) = l(x_k + v, y_k + u) + \frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}u - \frac{1}{2t_k}u^{\mathrm{T}}H_{2k}u.$$

Dès lors en remplaçant la fonction Lagrangienne par sa valeur, on obtient

$$\phi_k(v,u) = f_0(x_k + v) + \sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i + u_i\right]f_i(x_k + v) + \frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}u - \frac{1}{2t_k}u^{\mathrm{T}}H_{2k}u \tag{6.14}$$

$$si\ x_k + v \in C \text{ et } y_k + u \in R_+^m$$

$$= -\infty \quad \text{si } x_k + v \in C \text{ et } y_k + u \notin R_+^m \tag{6.15}$$

$$= +\infty \quad \text{si } x_k + v \notin C. \tag{6.16}$$

Envisageons deux possibilités différentes.

- Supposons d'abord que $x_k + v \notin C$.
  Dans ce cas, on a par la relation (6.16) que pour tout u $\phi_k(v,u) = +\infty$.
  Par conséquent, on peut prendre pour $\bar{u}_k$ (point maximisant $\phi_k(v,u)$ avec v fixé) n'importe quel point de R^m.
  On peut donc prendre en particulier $\bar{u}_k$ donné par la relation (6.10) et la proposition est démontrée.
- Supposons ensuite que $x_k + v \in C$.
  Sous cette hypothèse, il découle des relations (6.14) et (6.15) que

$$\phi_k(v,u) = f_0(x_k + v) + \sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i + u_i\right]f_i(x_k + v) + \frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}u$$

$$-\frac{1}{2t_k}u^{\mathrm{T}}H_{2k}u \qquad si\ y_k + u \geq 0 \tag{6.17}$$

$$= -\infty \quad \text{sinon.} \tag{6.18}$$

Dès lors,

$$\max_{u\in R^m} \phi_k(v,u) \Leftrightarrow \max_{u\in R^m} f_0(x_k + v) + \sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i + u_i\right]f_i(x_k + v) + \frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$

$$+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}u - \frac{1}{2t_k}u^{\mathrm{T}}H_{2k}u$$

$$\Leftrightarrow \max_{u\in R^m} f_0(x_k + v) + \sum_{i=1}^{m}(y_k)_i f_i(x_k + v) + \frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$

$$+\sum_{i=1}^{m}u_i f_i(x_k + v) + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^{m}H_{3k}(\cdot\,,i)u_i\right] - \frac{1}{2t_k}h_i^{(k)}(u_i)^2. \tag{6.19}$$

Afin de maximiser sur u et ainsi obtenir $\bar{u}_k$, nous allons maximiser sur chaque composante u_i. D'où, comme la fonction objectif de (6.19) est concave en u, en utilisant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalisation d'une fonction concave, nous obtenons

$$\forall i \in \{1,\cdots,m\} \qquad 0 \in -\partial_{u_i}\phi_2(v,\bar{u}_k) \tag{6.20}$$

où ϕ_2 est la fonction objectif de (6.19).

La relation (6.20) peut encore se réexprimer comme suit

$$\forall i \in \{1,\cdots,m\} \quad 0 \in -\left\{0 + 0 + 0 + f_i(x_k + v) + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot\,,i) - (\bar{u}_k)_i\frac{h_i^{(k)}}{t_k}\right\}.$$

On a donc ainsi

$$(\bar{u}_k)_i = \frac{t_k}{h_i^{(k)}}\left[f_i(x_k + v) + \frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot\,,i)\right]. \tag{6.21}$$

D'autre part comme $y_k - y_k \geq 0$, on est certain qu'il existe un u vérifiant $y_k + u \geq 0$ (il suffit par exemple de prendre $-y_k = u$).

Par conséquent on déduit de la relation (6.15) que

$$\max_{u\in R^m} \phi_k(v,u) > -\infty. \tag{6.22}$$

Dès lors $\bar{u}_k = \operatorname{argmax} \phi_k(v,u)$ vérifie $y_k + \bar{u}_k \geq 0$.

En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\phi_k(v,\bar{u}_k) = \operatorname*{argmax}_{u\in R^m} \phi_k(v,u) = -\infty$, ce qui contredirait la relation (6.22).

On a donc pour tout i : $(\bar{u}_k)_i \geq (-y_k)_i$ (6.23)

- Supposons dans un premier temps que $(\bar{u}_k)_i > (-y_k)_i$.

  Alors en remplaçant $(\bar{u}_k)_i$ par la valeur trouvée dans l'expression (6.21) on obtient

$$f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot\,,i) > \frac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k}.$$

- Supposons ensuite que $(\bar{u}_k)_i = (-y_k)_i$.

  Dans ce cas, on a directement la seconde égalité de (6.10).

On peut donc résumer ce qui précède comme suit :

$$(\bar{u}_k)_i = \frac{t_k}{h_i^{(k)}}\left[f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot\,,i)\right]$$

$$\text{si } f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot\,,i) > \frac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k}$$

$$= (-y_k)_i \quad \text{sinon.}$$

Ceci qui prouve la proposition 6.4.

□

Proposition 6.5

Si on note la i$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice H par $H(\cdot\,,i)$, alors $\bar{v}_k$ résout le problème de minimisation suivant :

$$\min_{v\in R^n} \phi_k^{(L)}(v) \tag{6.11}$$

où

$$\phi_k^{(L)}(v) = f_0(x_k+v)+\frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v+\sum_{i=1}^{m}\Psi\left(f_i(x_k+v),(y_k)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}(\cdot,i)\right)$$

et

$$\Psi(f_i,y_i,v,c,h_i,a) = f_i y_i + \frac{c}{2h_i}\left(f_i+\frac{1}{c}a^{\mathrm{T}}v\right)^2 \quad \text{si } f_i+\frac{1}{c}a^{\mathrm{T}}v > -\frac{y_i h_i}{c}$$

$$= -\frac{h_i y_i^2}{2c} - \frac{y_i}{c}a^{\mathrm{T}}v \quad \text{si } f_i+\frac{1}{c}a^{\mathrm{T}}v \leq -\frac{y_i h_i}{c}.$$

Preuve :

- Montrons d'abord que $\bar{v}_k$ résout le problème de minimisation

$$\min_{v\in R^n} f_0(x_k+v)+\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$
$$+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k .$$

Par définition, $\bar{v}_k$ résout le problème de minimisation

$$\min_{v\in R^n} \phi_k(v,\bar{u}_k).$$

Or en vertu des relations (6.14), (6.15), (6.16) (voir démonstration de la proposition 6.4) on a l'expression suivante pour $\phi_k(v,\bar{u}_k)$

$$\phi_k(v,\bar{u}_k)=f_0(x_k+v)+\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$
$$+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$
$$\text{si } x_k+v\in C \text{ et } y_k+\bar{u}_k\geq 0 \tag{6.24}$$
$$=-\infty \text{ si } x_k+v\in C \text{ et } y_k+\bar{u}_k\notin R_+^m \tag{6.25}$$
$$=+\infty \text{ si } x_k+v\notin C. \tag{6.26}$$

D'autre part, par la relation (6.23) (voir démonstration de la proposition 6.4) on sait que $(\bar{u}_k)_i\geq(-y_k)_i$ pour tout i. Dès lors $y_k+\bar{u}_k\geq 0$ et par conséquent les relations (6.24), (6.25) et (6.26) se réduisent à

$$\phi_k(v,\bar{u}_k)=f_0(x_k+v)+\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$
$$+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$
$$\text{si } x_k+v\in C$$
$$=+\infty \text{ si } x_k+v\notin C.$$

On en déduit donc que

$$\min_{v\in R^n}\phi_k(v,\bar{u}_k)\Leftrightarrow\min_{v\in R^n} f_0(x_k+v)+\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{2t_k}v^{\mathrm{T}}H_{1k}v$$
$$+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k . \tag{6.27}$$

- Puisque l'on a la relation (6.27) il suffit pour prouver la thèse de montrer que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\Psi\left(f_i(x_k+v),(y_k)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}(\,\cdot\,,i)\right).$$

- A cet effet, calculons d'abord

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k.$$

En remplaçant $(\bar{u}_k)_i$ par sa valeur (voir proposition 6.4), on sait que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$

$$=\begin{cases}\circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left((y_k)_i+\frac{t_k\left(F(x_k+v)+\frac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}v\right)_i}{h_i^{(k)}}\right)f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k \\ \quad -\displaystyle\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k \\ \quad \text{si } \left(F(x_k+v)+\frac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}v\right)_i>\frac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left((y_k)_i-(y_k)_i\right)f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k \qquad \text{sinon}.\end{cases}$$

En utilisant le fait que $H_{2k} = \operatorname{diag}\left(h_1^{(k)}, \cdots, h_m^{(k)}\right)$ on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left(y_k\right)_i + \left(\bar{u}_k\right)_i\right] f_i\left(x_k + v\right) + \frac{1}{t_k} v^{\mathrm{T}} H_{3k} \bar{u}_k - \frac{1}{2t_k}\left(\bar{u}_k\right)^{\mathrm{T}} H_{2k} \bar{u}_k$$

$$= \begin{cases} \circ \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\left(y_k\right)_i + \frac{t_k\left(f_i\left(x_k+v\right) + \frac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)}{h_i^{(k)}}\right) f_i\left(x_k+v\right) + \frac{1}{t_k}\left(v^{\mathrm{T}} H_{3k}\right)_i \left(\bar{u}_k\right)_i \\ \quad - \dfrac{1}{2t_k}\left(\bar{u}_k\right)_i^2 h_i^{(k)} \\ \quad \text{si } f_i\left(x_k+v\right) + \dfrac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v > \dfrac{-\left(y_k\right)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \circ \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{t_k}\left(v^{\mathrm{T}} H_{3k}\right)_i \left(\bar{u}_k\right)_i - \frac{1}{2t_k} h_i^{(k)} \left(\bar{u}_{k_i}\right)^2 \\ \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Il en résulte donc, si on remplace à nouveau $\left(\bar{u}_k\right)_i$ par sa valeur , que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left(y_k\right)_i + \left(\bar{u}_k\right)_i\right] f_i\left(x_k + v\right) + \frac{1}{t_k} v^{\mathrm{T}} H_{3k} \bar{u}_k - \frac{1}{2t_k}\left(\bar{u}_k\right)^{\mathrm{T}} H_{2k} \bar{u}_k$$

$$= \begin{cases} \circ \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(y_k\right)_i f_i\left(x_k+v\right) + \frac{t_k}{h_i^{(k)}} f_i\left(x_k+v\right)\left(f_i\left(x_k+v\right) + \frac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right) \\ \quad + \dfrac{1}{t_k} v^{\mathrm{T}} H_{3k}(\cdot,i)\, t_k \dfrac{\left(f_i\left(x_k+v\right) + \frac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)}{h_i^{(k)}} \\ \quad - \dfrac{1}{2t_k} h_i^{(k)} \dfrac{\left(t_k\right)^2}{\left(h_i^{(k)}\right)^2}\left(f_i\left(x_k+v\right) + \dfrac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)^2 \\ \quad \text{si } f_i\left(x_k+v\right) + \dfrac{1}{t_k} H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v > \dfrac{-\left(y_k\right)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \circ \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{t_k}\left(y_k\right)_i\left(v^{\mathrm{T}} H_{3k}(\cdot,i)\right) - \frac{1}{2t_k}\left(\left(y_k\right)_i\right)^2 h_i^{(k)} \\ \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, en mettant en évidence le terme $\dfrac{t_k}{h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)$ partout où cela est possible, on obtient que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$

$$=\begin{cases}\circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(y_k)_i f_i(x_k+v) \\ \qquad +\dfrac{t_k}{h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot,i)\right) \\ \qquad -\dfrac{1}{2}\dfrac{t_k}{h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v\right)^2 \\ \qquad \text{si } f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}^{\mathrm{T}}(i,\cdot)v>\dfrac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \\ \circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}-\frac{1}{t_k}(y_k)_i\left(v^{\mathrm{T}}H_{3k}(\cdot,i)\right)-\frac{1}{2t_k}\left((y_k)_i\right)^2 h_i^{(k)} \\ \qquad \text{sinon.}\end{cases}$$

En rassemblant les termes semblables, on obtient finalement que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[(y_k)_i+(\bar{u}_k)_i\right]f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}(\bar{u}_k)^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$

$$=\begin{cases}\circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}(y_k)_i f_i(x_k+v)+\frac{t_k}{2h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\frac{1}{t_k}H_{3k}(\cdot,i)^{\mathrm{T}}v\right)^2 \\ \qquad \text{si } f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}H_{3k}(\cdot,i)^{\mathrm{T}}v>\dfrac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \\ \circ\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{-h_i^{(k)}\left((y_k)_i\right)^2}{2t_k}-\frac{(y_k)_i\left(H_{3k}(\cdot,i)\right)^{\mathrm{T}}v}{t_k} \\ \qquad \text{sinon.}\end{cases}\tag{6.28}$$

- Calculons ensuite $\sum_{i=1}^{m} \Psi\left(f_i(x_k+v),(y_k)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}(\cdot,i)\right)$.

Par définition,

$$\Psi\left(f_i(x_k+v),(y_k)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}(\cdot,i)\right)$$

$$= \begin{cases} \circ \quad f_i(x_k+v)(y_k)_i + \dfrac{t_k}{2h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}\left[H_{3k}(\cdot,i)\right]^{\mathrm{T}} v\right)^2 \\ \qquad \text{si } f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}\left(H_{3k}(\cdot,i)^{\mathrm{T}} v\right) > \dfrac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \\ \circ \quad \dfrac{-h_i^{(k)}\left((y_k)_i\right)^2}{2t_k} - \dfrac{(y_k)_i\left(H_{3k}(\cdot,i)\right)^{\mathrm{T}} v}{t_k} \\ \qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, en sommant pour i = 1, ... , m, on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} \Psi\left(f_i(x_k+v),(y_k)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}(\cdot,i)\right)$$

$$= \begin{cases} \circ \quad \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k+v)(y_k)_i + \dfrac{t_k}{2h_i^{(k)}}\left(f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}\left[H_{3k}(\cdot,i)\right]^{\mathrm{T}} v\right)^2 \\ \qquad \text{si } f_i(x_k+v)+\dfrac{1}{t_k}\left(H_{3k}(\cdot,i)^{\mathrm{T}} v\right) > \dfrac{-(y_k)_i h_i^{(k)}}{t_k} \\ \\ \circ \quad \sum_{i=1}^{m} \dfrac{-h_i^{(k)}\left((y_k)_i\right)^2}{2t_k} - \dfrac{(y_k)_i\left(H_{3k}(\cdot,i)\right)^{\mathrm{T}} v}{t_k} \\ \qquad \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.29}$$

- Il suffit alors de comparer les relations (6.28) et (6.29).
  On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\left(y_k\right)_i+\left(\bar{u}_k\right)_i\right]f_i\left(x_k+v\right)+\frac{1}{t_k}v^{\mathrm{T}}H_{3k}\bar{u}_k-\frac{1}{2t_k}\bar{u}_k{}^{\mathrm{T}}H_{2k}\bar{u}_k$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\Psi\left(f_i\left(x_k+v\right),\left(y_k\right)_i,v,t_k,h_i^{(k)},H_{3k}\left(\,\cdot\,,i\right)\right).$$

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié divers algorithmes permettant de résoudre des problèmes d'optimisation.

La première partie a été consacrée aux problèmes d'optimisation convexe sans contrainte. Nous avons notamment étudié l'algorithme du point proximal. C'est l'algorithme le plus généralement connu pour résoudre ce genre de problèmes. Nous avons constaté que cet algorithme du point proximal converge et en avons développé diverses variantes, à savoir la méthode proximale à métrique variable et la méthode proximale à métrique variable de type faisceau.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'optimisation convexe avec contraintes. Pour ceux-ci, nous avons procédé par paliers successifs.
Dans une première approche, nous avons adopté les algorithmes établis dans le cadre de l'optimisation sans contrainte en les combinant avec une méthode de diagonalisation.
Ensuite, dans une seconde approche, nous avons étudié la notion de vitesse de convergence et avons développé à cette fin deux algorithmes différents, l'un s'appliquant au primal, l'autre au dual.
Le résultat essentiel à retenir de cette seconde partie est que l'augmentation de la vitesse de convergence de l'algorithme nécessite de réintroduire des hypothèses de différentiabilité, du moins dans un voisinage de l'origine. Il semble donc qu'une suite ne puisse converger aussi vite que l'on veut vers la solution optimale d'un problème sans disposer de certaines hypothèses de différentiabilité.

Notons cependant que dans le cadre d'optimisation sans contrainte, il reste encore une question en suspens.
En effet, dans la dernière variante de l'algorithme proximal étudié, nous n'avons pas pu réussir à démontrer la convergence de l'algorithme. La difficulté réside dans le fait que, dans cette variante de l'algorithme proximal, on met à jour, lors de chaque itération, les matrices qui définissent la métrique, et ces mises à jour peuvent engendrer des matrices dégénérées.

Annexes

Nous rassemblons ci-dessous quelques définitions et propriétés fondamentales de l'analyse convexe.

I. Ensembles et fonctions convexes

Soient C un sous-ensemble de R^n et f une fonction définie de R^n dans $R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

I.1 L'***ensemble C*** est ***convexe*** si $\forall x, y \in C$ et $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

I.2 Le ***domaine*** de la fonction f est l'ensemble

$$\text{dom}\, f := \{x \in R^n \text{ tels que } f(x) < +\infty\}.$$

I.3 L'***épigraphe*** de la fonction f est l'ensemble

$$\text{épi}\, f : = \{(x, r) \in R^n \times R \text{ tels que } f(x) \leq r\}.$$

I.4 La ***fonction f*** est ***propre*** si

$$\text{dom}\, f \neq \emptyset \text{ et } f(x) > -\infty \text{ pour tout } x \in R^n.$$

I.5 La ***fonction f*** est ***convexe*** si son épigraphe est un sous-ensemble convexe de R^{n+1}.

I.6 <u>Proposition</u> : Si la fonction f est propre, alors f est convexe si et seulement si dom$f$ est convexe et $\forall x, y \in$ dom$f$, $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

I.7 Si la ***fonction f*** est propre, alors f est ***strictement convexe*** si et seulement si dom f est convexe et $\forall x, y \in$ dom$f$ tels que $x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[$ on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

I.8 Si la ***fonction f*** est propre, alors f est ***fortement convexe*** de rapport α $(\alpha > 0)$ si dom$f$ est convexe et $\forall x, y \in$ dom$f$, $\forall \lambda \in]0,1[$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{1}{2} \alpha\, \lambda (1-\lambda) \|x - y\|^2.$$

Enonçons maintenant quelques propriétés des fonctions convexes.

I.9 Proposition : Toute fonction propre convexe est minorée par une fonction affine.

I.10 Proposition :

a) Soit f une fonction convexe et g une fonction fortement convexe de module α, la somme $f+g$ est une fonction fortement convexe de module α.

b) Soit g une fonction différentiable allant de R^n dans R.
g est fortement convexe de module α si et seulement si $\forall x, y \in R^n$

$$< \nabla g(y) - \nabla g(x), y - x > \geq \alpha \|y - x\|^2.$$

I.11 Proposition : Soit J un ensemble inclus dans R^n et $\left(f_j\right)_{j\in J}$ une famille de fonctions allant de R^n dans $R \cup \{+\infty\}$ convexes et propres.

Si $\exists x_0 \in R^n$ tel que $\sup\limits_{j\in J} f_j(x_0) < \infty$,

alors $f = \sup\limits_{j\in J} f_j$ est convexe.

I.12 Proposition : Toute fonction convexe, finie et différentiable est continûment différentiable.

Pour énoncer la dernière proposition des fonctions convexes, les définitions suivantes sont nécessaires.

I.13 La ***variété affine*** de A est le plus petit sous-ensemble affine de R^n qui contient A. Elle est notée $Aff(A)$.

I.14 L'***intérieur relatif***, noté $ri(A)$, est l'intérieur de A par rapport à $Aff(A)$.

I.15 Soit $x_0 \in ri \operatorname{dom} f$.
f est ***localement Lipschitzienne*** en x_0 si
$\exists L \geq 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in B(x_0, \delta) \cap aff \operatorname{dom} f : |f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$.

Enonçons à présent la dernière propriété des fonctions convexes.

I.16 Proposition : Toute fonction convexe et à valeur dans R est continue et localement Lipschitzienne.

II. Semi-continuité inférieure et fermeture.

II.1 Une ***fonction f*** définie de R^n dans $R \cup \{-\infty,+\infty\}$ est ***semi-continue inférieurement*** (ou s.c.i) en $x_0 \in R^n$ si
$\forall \lambda < f(x_0)$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in R^n$ $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \lambda < f(x)$.

II.2 Proposition : Une fonction f est semi-continue inférieurement si et seulement si pour toute suite (x_n) tendant vers $\overline{x}$ $\underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\overline{x})$.

II.3 On définit la fermeture de la fonction convexe propre $f : R^n \to R \cup \{-\infty,+\infty\}$ par cl $f : R^n \to R \cup \{-\infty,+\infty\}$ où $\mathrm{cl} f(x) = \sup\limits_{\substack{F \text{ affine} \\ F \leq f}} F(x)$.

II.4 Proposition : Soit f une fonction définie de R^n dans $R \cup \{\infty\}$ convexe et propre.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est sci sur R^n.
(ii) $\forall \alpha \in R$, l'ensemble niveau $\{x \text{ tel que } f(x) \leq \alpha\}$ est fermé dans R^n.
(iii) cl $f = f$.

II.5 Proposition : Toute fonction s.c.i atteint sa borne inférieure sur un compact.

III. Dérivée directionnelle

Soit f une fonction définie de R^n dans $R \cup \{-\infty,+\infty\}$ et $x_0 \in R^n$ tel que $f(x_0) \in R$.

III.1 Pour tout $d \in R^n$, la ***dérivée directionnelle*** de f en x_0 dans la direction d est la limite

$$f'(x_0;d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{\cancel{\varepsilon}\; t}$$ si cette limite existe.

($+\infty$ et $-\infty$ sont des valeurs permises).

III.2 Proposition : Lorsque la dérivée directionnelle de f en x_0 dans la direction d existe, on a $f'(x_0;-d) = -f'(x_0;d)$.

III.3 Proposition : Si f est différentiable en x_0, alors les dérivées directionnelles $f'(x_0;d)$ sont finies pour tout $d \in R^n$.
De plus, $f'(x_0;d) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle$ où $\nabla f(x_0)$ est le gradient de f en x_0.

IV. Sous-gradients et ε-sous-gradients d'une fonction convexe

Considérons dorénavant une fonction convexe et propre f définie de R^n dans $R \cup \{+\infty\}$.

A. Sous-gradients d'une fonction convexe

IV.1 Soit $x \in \operatorname{dom} f$.

Un vecteur $d \in R^n$ est un ***sous-gradient*** de f au point x si

$\forall y \; f(y) \geq f(x) + \langle d, y-x \rangle$.

IV.2 L'ensemble des sous-gradients de f en x est appelé le sous-différentiel de f en x et est noté $\partial f(x)$. De plus, par convention, si $x \notin \operatorname{dom} f$ $\partial f(x) = \emptyset$.

IV.3 Proposition : Pour tout $x \in R^n$, le sous-différentiel de f en x est un ensemble fermé et convexe. De plus, il est non vide et borné si et seulement si x appartient à l'intérieur du domaine f.

IV.4 Le ***sous-différentiel*** de f est l'application multivoque définie de R^n dans l'ensemble des parties de R^n par $\partial f : x \to \partial f(x)$.

IV.5 Proposition :

- L'application multivoque ∂f est une application
  - monotone, c'est à dire
    $\forall u_1, u_2 \in \operatorname{dom} f; \quad \forall v_1 \in \partial f(u_1); \quad \forall v_2 \in \partial f(u_2) \; : \; \langle u_2 - u_1, v_2 - v_1 \rangle \geq 0,$
  - localement bornée, c'est-à-dire pour tout $B \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ borné, on a
    $\partial f(B) = \bigcup_{b \in B} \partial f(b)$ est une partie bornée de R^n.
- De plus, si f est une fonction semi-continue inférieurement alors ∂f est une application fermée, c'est-à-dire que pour toute suite (x_k) qui tend vers $\bar{x}$ et pour toute suite (s_k) appartenant au sous-différentiel de f en x_k et tendant vers $\bar{s}$, on a $\bar{s} \in \partial f(\bar{x})$.

IV.6 On définit la fonction support d'un ensemble S par la fonction

$\sigma_s : R^n \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $\sigma_s(x) = \sup_{s \in S} \langle s, x \rangle$.

Le théorème suivant établit un lien entre le sous-différentiel de f en x, la fonction support et la dérivée directionnelle.

IV.7 La dérivée directionnelle de f en x_0 dans la direction d est la fonction support du sous-différentiel de f en x_0

$$f'(x_0, d) = \sup_{s \in \partial f(x_0)} < s, x_0 >.$$

Enonçons quelques propriétés utiles pour le calcul du sous-différentiel.

IV.8 Proposition : [sous-différentiel d'une fonction différentiable]
Soit f une fonction convexe à valeur dans R, et x_0 un point de R^n.
Alors f est différentiable en x_0 si et seulement si $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

IV.9 Proposition : [sous-différentiel d'une somme]
Soient f et g deux fonctions convexes, propres et définies de R^n dans $R \cup \{+\infty\}$.
Si la fonction f est continue en un point $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, alors

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x) \quad \forall x.$$

IV.10 Proposition : [sous-différentiel d'une fonction maximum]
Soient I un ensemble fini de R^n et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions convexes allant de R^n dans R. Alors la fonction $f = \sup_{i \in I} f_i$ est continue et convexe.
De plus, le sous-différentiel de f en x_0 est donné par l'expression

$$\partial f(x_0) = \mathrm{CO} \bigcup_{i \in M(x_0)} \partial f_i(x_0) \text{ où } M(x_0) = \{i \in x \text{ tq } f_i(x_0) = f(x_0)\}.$$

B. ε-sous-gradients d'une fonction convexe

IV.11 Soit $\varepsilon \geq 0$, $x \in \operatorname{dom} f$.
Un vecteur d est un ***ε-sous-gradient*** de f au point x si
$\forall y \;\; f(y) \geq f(x) + \langle d, y - x \rangle - \varepsilon$.

IV.12 L'ensemble des ε-sous-gradients de f en x est appelé le ε-sous-différentiel de f en x et noté $\partial_\varepsilon f(x)$.

IV.13 Par convention, si $x \notin \operatorname{dom} f$ alors $\partial_\varepsilon f(x) = \emptyset$.

IV.14 <u>Proposition</u> : $\partial_\varepsilon f(x)$ est convexe et fermé.
De plus, $\partial_\varepsilon f(x)$ est non vide et borné si et seulement si $x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

IV.15 <u>Proposition</u> : L'application multivoque définie de $R^+ \times R^n$ dans l'ensemble des parties de R^n qui au point (ε, x) associe $\partial_\varepsilon f(x)$ est une application fermée.
Cela signifie que pour toute suite (ε_k) tendant vers ε, pour toute suite (x_k) tendant vers $\bar{x}$, et pour toute suite (s_k) tendant vers $\bar{s}$ où $s_k \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k)$ on a $\bar{s} \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$.

Quelques propriétés utiles pour le calcul du ε-sous-différentiel.

IV.16 <u>Proposition</u> : [sous-différentiel d'un maximum]

Soit $f_1, \cdots, f_m$ des fonctions convexes de R^n dans R,
$\varepsilon \geq 0$,
$f = \max \{f_1(x), \cdots, f_m(x)\}$.
Alors $x^* \in \partial_\varepsilon f(x)$ si et seulement si

$\exists \lambda_i \geq 0 \;\; i = 1, \cdots, m$ avec $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$,

$\exists \varepsilon_i \geq 0 \;\; i = 1, \cdots, m$

tels que (*i*) $x^* \in \sum_{i=1}^{m} \partial_{\varepsilon_i}(\lambda_i f_i(x))$

(*ii*) $0 \leq f(x) - \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i f_i(x)) \leq \varepsilon - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i$.

IV.17 <u>Proposition</u> : [sous-différentiel d'une somme]

Soit $f_1, f_2 : R^n \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ deux fonctions convexes, propres, s.c.i. ;
$\varepsilon \geq 0$;
$x \in \operatorname{dom}(f_1 + f_2) \; (= \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2)$.
Alors,
$\partial_\varepsilon (f_1 + f_2)(x) \supseteq \cup \{\partial_{\varepsilon_1} f_1(x) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x) \text{ tq } \varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \varepsilon\}$
De plus, si $\operatorname{ri} \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{ri} \operatorname{dom} f_2 \neq \emptyset$, on a l'égalité.

V. Propriétés extrémales des fonctions convexes

A. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \textbf{minimiser } \mathbf{f(x)} \\ \textbf{s.c.} \qquad \mathbf{x \in R^n} \end{cases}$$

où f est une fonction propre, convexe, définie de R^n dans $\mathrm{R} \cup \{+\infty\}$.

V.1 Proposition : soit $x_0 \in R^n$.
x_0 est un minimum de f sur R^n si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.

V.2 Proposition : Si la fonction f est strictement convexe, alors l'ensemble des minima de f sur R^n, c'est-à-dire $\underset{x \in R^n}{\operatorname{argmin}} f(x)$, est soit l'ensemble vide, soit un singleton.

V.3 Une fonction est dite inf-compacte si et seulement si pour tout α les ensembles niveau $\{x \text{ tq } f(x) \leq \alpha\}$ sont des ensembles fermés bornés.

V.4 Proposition : Si la fonction f est inf compacte, alors, elle admet au moins un minimum.

B. Considérons ensuite le problème

$$\textbf{(P)} \begin{cases} \textbf{minimiser } \mathbf{f(x)} \\ \textbf{s.c.} \qquad \mathbf{g_j(x) \leq 0} \qquad \mathbf{j = 1, \cdots p} \end{cases}$$

où les fonctions f et g_i sont des fonctions allant de R^n dans R et de classe C^2.

V.5 Proposition : [Kuhn-Tucker]
Supposons que les fonctions f et g_i soient convexes et considérons x^* un point admissible du problème (P).
Alors x^* est solution optimale de (P) si et seulement si il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_i^* $i \in \{1, \cdots, p\}$ tels que :
- $\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \cdots, p$
- $\lambda_i^* \, g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \cdots, p$
- x^* minimise la fonction de Lagrange $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* g_i(x)$.

V.6 Proposition : [Condition de Slater]
Supposons que la condition de Slater $\exists \bar{x} \in R^n$ tel que $g_i(\bar{x}) < 0 \quad i = 1 \cdots, p$ soit satisfaite et que x^* soit un point admissible du problème (P).
Dans ce cas, si x^* est solution optimale de (P), alors il existe des multiplicateurs de Lagrange λ_i^* $i \in \{1, \cdots, p\}$ tels que :
- $\lambda_i^* \geq 0 \quad i = 1, \cdots, p$
- $\lambda_i^* \, g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \cdots, p$
- x^* minimise la fonction de Lagrange $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* g_i(x)$.

VI. Propriétés des matrices

VI.1 Une matrice réelle A est semi-définie positive si $\forall d \in R^n \qquad d^{\mathrm{T}} A d \geq 0$.
De plus, A est définie positive si $\forall d \in R^n \quad (d \neq 0)\; d^{\mathrm{T}} A d > 0$.

VI.2 Proposition : Une matrice réelle A est semi-définie positive (respectivement définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

VI.3 Une suite de matrices (A_k) est uniformément définie positive si il existe deux nombres m et M strictement positifs tels que pour tout k et pour tout d on a
$0 < m\|d\|^2 \leq d^{\mathrm{T}} A_k d \leq M\|d\|^2$.

VI.4 Soit A une matrice Hermitienne. On définit le quotient de Rayleigh de cette matrice comme étant la fonction $r_A(x) = \dfrac{<x, A>}{<x, x>}$.
Notons que cette fonction n'est définie que pour les x non nuls.

VI.5 Proposition : Soit A une matrice hermitienne et $r_A(\cdot)$ son quotient de Rayleigh.
Alors, si $\lambda_{\min}(A)$ et $\lambda_{\max}(A)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A, nous avons $r_A(x) \in [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)]$.

VI.6 Proposition : [Mise à jour BFGS d'une matrice]
Supposons que l'on ait à notre disposition deux vecteurs u et v, ainsi qu'une matrice M_n définie positive. La mise à jour BFGS de la matrice M_n engendre une matrice M_{n+1} définie de la manière suivante :

$$M_{n+1} = M_n + A - B$$

où $A = \dfrac{vv^{\mathrm{T}}}{<v, u>}$ si $<v, u> \neq 0$

$= 0$ si $<v, u> = 0$

et $B = \dfrac{M_n u u^{\mathrm{T}} M_n}{<M_n u, u>}$ si $<M_n u, u> \neq 0$

$= 0$ sinon.

VI.7 Proposition : La matrice M_{n+1} obtenue par une mise à jour BFGS vérifie l'équation sécante $M_{n+1} u = v$.

De plus, M_{n+1} est une matrice semi-définie positive et elle est dégénérée si et seulement si $<v, u> = 0$.

Bibliographie

[1] H. Attouch & M. Théra.
Convergences en analyse multivoque et variationnelle.
Version révisée de la présentation scientifique du colloque international "Convergence en analyse Multivoque et Unilatérale", tenue au CIRM (22-26 juin 1992), p23-31.

[2] M.A. Bahraoui & B. Lemaire.
Méthodes de faisceaux diagonales en optimisation convexe.
Université de Montpellier II.

[3] R. Correa & C. Lemaréchal.
Convergence of some algorithms for convex minimization.
Manuscript, INRIA, 78153 Le Chesnay Cedex (France), 1993.

[4] J.B. Hiriart Urruty and C. Lemaréchal.
Convex Analysis and Minimization Algorithms II.
Springer Verlag, 1993, p 317-330.

[5] C. Lemaréchal and C. Sagastizabal.
An Approach to Variable Metric Bundle Methods.
Proceedings 16th IFIP, Conference System, Modelling & Optimization, Compiègne, July '93.

[6] M. Qian.
The Variable Metric Proximal Point Algorithm : Global and Superlinear Convergence.
Math programming A 7/2/93.

[7] M. Qian.
The variable Metric Proximal Point Algorithm : Application to Optimization.
Math Programming A 7/2/93.

[8] Schramm,H.,Zowe,J.:
A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea,convergence analysis,numerical results.
SIAM J.opt.2 (1992) 121-152.

[9] J. Van Tiel.
Convex Analysis, An Introductory Text.
John Willey and Sons Ltd, 1984.